Université Pierre et Marie Curie

MÉMOIRE

présenté pour l'obtention de

l'**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

(Spécialité : Mathématiques)

sur les

« Frises et Algèbres Non-Associatives »

par

Sophie Morier-Genoud

Soutenu le 3 Décembre 2014

RAPPORTEURS

M. Frédéric Chapoton (Université Claude Bernard Lyon)
M. Alberto Elduque (Universidad de Zaragoza)
M. Sergey Fomin (University of Michigan)

JURY

M. Frédéric Chapoton (Université Claude Bernard Lyon)
M. Alberto Elduque (Universidad de Zaragoza)
M. David Hernandez (Université Paris Diderot)
M. Ilia Itenberg (Université Pierre et Marie Curie)
M. Bernard Leclerc (Université de Caen Basse Normandie)

Résumé

Ce mémoire consiste en deux parties indépendantes. La première partie porte sur des généralisations des frises de Coxeter. On étudie en particulier une variante appelée 2-frises, en interaction avec la théorie des algèbres amassées. On établit une trialité entre les frises, les équations linéaires en différence et les espaces de modules de polygones. Cette trialité permet notamment d'utiliser la géométrie projective pour étudier les frises et les équations, mais aussi d'utiliser les algèbres amassées pour étudier les espaces de polygones. La transformée de Gale est définie dans le cadre de cette trialité, induisant des isomorphismes non triviaux entre différents espaces de frises ou différents espaces d'équations.

Dans la deuxième partie on étudie des algèbres non-associatives. On présente tout d'abord une série d'algèbres généralisant l'algèbre des octonions. Cette série est construite en utilisant une combinatoire binaire qui se révèle efficace dans la résolution du problème de Hurwitz sur les identités en sommes de carrés. On propose alors des constructions explicites de nouvelles identités. On termine en présentant une classe particulière d'algèbres de Jordan pour laquelle on développe la théorie des représentations et des exemples construits à partir de surfaces de Riemann marquées.

Abstract

This dissertation consists in two independent parts. The first part deals with generalizations of Coxeter friezes. We study the variant of so-called 2-friezes, using the theory of cluster algebras. We establish a "triality" between the spaces of friezes, the linear difference equations and the moduli spaces of polygons. This triality makes possible the use of projective geometry to study friezes and equations, as well as the use of cluster algebras to study the spaces of polygons. The combinatorial Gale transform is defined within this triality, and provides isomorphisms between different spaces of friezes and of difference equations.

In the second part, we study nonassociative algebras. We define a series of algebras generalizing the algebra of octonions. This series is constructed from binary combinatorics and it is applied to the classical Hurwitz problem of sums of squares identities. In particular, we give explicit constructions of new identities. In the end of the dissertation, we present a special class of Jordan superalgebras, for which we develop representation theory and construct examples based on punctured Riemann surfaces.

Contents of the dissertation

This dissertation consists in two independent parts : *Frieze Patterns* and *Non-Associative Algebras*. The problems studied, and the methods used in each of these parts contain algebra, combinatorics and representation theory.

Presented papers

The results presented in the dissertation are published in the following research papers. Other references are cited by letters and listed at the end of the dissertation.

Part I : Frieze patterns

[1] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, S. Tabachnikov. *2-Frieze patterns and the cluster structure of the space of polygons.* Ann. Inst. Fourier **62** (2012), 937–987.
[2] S. Morier-Genoud. *Arithmetics of 2-friezes.* J. Algebraic Combin. **36** (2012), 515–539.
[3] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, R. E. Schwartz, S. Tabachnikov, *Linear difference equations, frieze patterns and combinatorial Gale transform*, Forum Math. Sigma 2 (2014), e22.
[4] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, S. Tabachnikov. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*-tilings of the torus, Coxeter-Conway friezes and Farey triangulations,* 2014, Ens. Math., to appear.

Part II.1, II.2 : Non-associative algebras (generalized octonions, Hurwitz square identities)

[5] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Well, Papa, can you multiply triplets ?*, Math. Intell. **31** (2009), 1–2.
[6] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Simple graded commutative algebras*, J. Algebra. **323** (2010), 1649–1664.
[7] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *A series of algebras generalizing the octonions and Hurwitz-Radon identity*, Comm. Math. Phys. **306** (2011), 83–118.
[8] A. Lenzhen, S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *New solutions to the Hurwitz problem on square identities*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 2903–2911.
[9] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Orthogonal designs and a cubic binary function*, IEEE Trans. Information Theory, **59** :3 (2013) 1583–1589.
[10] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Extremal set theory, cubic forms on* $\mathbb{F}_2^n$ *and Hurwitz square identities* (avec V. Ovsienko), arXiv :1304.0949, submitted.
[11] M. Kreusch, S. Morier-Genoud, *Classification of the algebras* $\mathbb{O}_{p,q}$, 2014, Comm Alg, to appear.

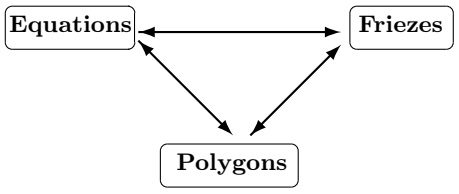
Part II.3 : Non-associative algebras (Kaplansky-Jordan superalgebras)

[12] S. Morier-Genoud, *Representations of* asl_2*,* Intern. Math. Res. Notices., IMRN 2009, no. 10, 1838–1859.
[13] S. Leidwanger, S. Morier-Genoud, *Universal enveloping algebras of Lie antialgebras,* Algebr. Represent. Theor. **15** (2012), no 1, 1–27.
[14] S. Leidwanger, S. Morier-Genoud, *Superalgebras associated to Riemann surfaces : Jordan algebras of Krichever-Novikov type*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), no. 19, 4449–4474.
[15] S. Leidwanger, S. Morier-Genoud, *A short survey of Lie antialgebras*, QQQ Tallinn'12 conference Proceedings, J. Phys. : Conf. Series, to appear.

Part I

Frieze patterns of numbers are a beautiful invention of Coxeter [Cox71]. We study generalized Coxeter frieze patterns. Our motivation comes from the identification of friezes and linear difference equations with (anti)periodic solutions. Friezes and equations were studied independently, and their theories have almost nothing in common ; this identification provides a wealth of applications. Moreover, classical projective geometry relates linear difference equations and the spaces of configurations of n points in projective spaces modulo projective equivalence. This incorporates geometric methods and ideas in the study of friezes. Conversely, on can use friezes and cluster algebras to study the moduli spaces of polygons.

Triality



We prove [3] that the following three spaces :

1. space of linear difference equations,
2. space of frieze patterns,
3. moduli space of n-gons in $\mathbb{P}^k$

can be identified. More precisely, the first two are isomorphic algebraic varieties ; the third space is also isomorphic to them provided n and $k+1$ are coprime. If n and $k+1$ are not coprime, then there is a natural projection to the third space, with a non-trivial kernel.
This "triality" allows us to combine analytic, combinatorial and geometric approaches and convert information from one fields to another. This idea is essential in our results, in particular in the study of the Gale transforms and the cluster structures on the different spaces.

Combinatorial Gale transform

The classical Gale transform [Gal56] is defined between moduli spaces of projective n-gons. In [3], we define a combinatorial version of the Gale transform in terms of friezes and equations. It leads to unexpected relations between spaces of difference equations of different orders.

The simplest example we can give is the following. Consider a third-order linear difference equation

$$V_i = a_i V_{i-1} - b_i V_{i-2} + V_{i-3}, \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Assume that the coefficients (a_i) and (b_i) are 5-periodic : $a_{i+5} = a_i$ and $b_{i+5} = b_i$, and that all the solutions (V_i) are also 5-periodic, i.e., $V_{i+5} = V_i$. The combinatorial Gale transform in this case consists in "forgetting the coefficients b_i" and associates to this equation the following difference equation of order 2 :

$$W_i = a_i W_{i-1} - W_{i-2}.$$

It turns out that all solutions of the latter equation are also 5-antiperiodic : $W_{i+5} = -W_i$. Conversely, one can reconstruct the initial third order equation from the second order one.

This combinatorial Gale transform was recently used by Igor Krichever [Kri14] for a new understanding of the theory of commuting difference operators.

Cluster algebras

Current interest to frieze patterns is due to relation to cluster algebras [FZ02b],[CC06]. This relation gave rise to different versions and generalizations of friezes, e.g. [BM09, ARS10, HJ13]. The theory of cluster algebras plays an important role in our results.

The spaces of friezes are cluster varieties. This leads to natural coordinate systems on the moduli spaces of n-gons [1] and provides a canonical (pre)symplectic forms on the spaces.

Our main motivation and further developement is an application to integrable dynamical systems, such as the *pentagram map* and its generalizations.

2-friezes

A variant of frieze patterns, introduced by James Propp [Pro05], is studied in [1]. We establish various properties of the 2-friezes analogous to those of the Coxeter friezes. In particular we prove a conjecture of Propp on the Laurent phenomenon in 2-friezes.

In [2], we study 2-friezes with positive integers values. Using the theory of cluster algebras, we prove that the number of positive integral 2-friezes is infinite, which answers another question of Propp. This is a major difference with the Coxeter friezes. Conway-Coxeter theorem [CC73] gives a one-to-one correspondence between friezes with positive integer values and triangulations of polygons, and thus gives a finite (Catalan !) number of such a friezes. This raises an important question on integer points in friezes and cluster varieties, which is a part of a current project.

From the geometric side, the space of 2-friezes is the moduli space of n-gons in the projective plane, which is precisely the space where the pentagram map operates. The 2-friezes offer a combinatorial framework to study the pentagram map.

Farey polygons

The *Farey sequence* of order N consists of rationals $\frac{p}{q}$, such that $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$, and $q \leq N$. Coxeter suggests to use such sequences to construct frieze patterns of positive integers.

We describe [4] a one-to-one correspondence between Coxeter friezes of positive integers and connected paths in the Farey graph (modulo projective equivalence and circular permutation). Since every Farey polygon is triangulated, this leads to an understanding of the Conway-Coxeter theorem, that seems to be new.

Pairs of Farey polygons are also used to classify $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-tilings on the torus [4].

Part II.1 and II.2

We study a series of non-associative algebras $\mathbb{O}_{p,q}$ generalizing the octonions. The algebras are obtained as a twist of the group algebras over $\mathbb{Z}_2^n$. The underlying binary combinatorics attached to these algebras turns out to be well adapted for the problem of Hurwitz on sums of squares identites.

The Hurwitz problem

An $[r, s, N]$-square identity is of the form

$$(a_1^2 + \cdots + a_r^2)\,(b_1^2 + \cdots + b_s^2) = c_1^2 + \cdots + c_N^2,$$

where c_i are bilinear expressions in a_j and b_k with coefficients in $\mathbb{Z}$. The Hurwitz problem is to determine all the triples (r, s, N) such that there exists an $[r, s, N]$-identity.

The special case $r = s = N$, treated by Hurwitz in 1898, corresponds to classification of real normed division algebras. In particular, the $[8, 8, 8]$-identity is nothing else but multiplicativity of norms in the algebra $\mathbb{O}$ of octonions :

$$\|a\|^2\,\|b\|^2 = \|c\|^2.$$

Hurwitz and Radon [Hur22], [Rad22] determined r for which there exists an $[r, N, N]$-identity. The maximal value of r as a function of N is called the *Hurwitz-Radon function.*

The problem of Hurwitz, and the Hurwitz-Radon function, occupy a central place in classical mathematics, relating number theory, algebra, geometry and topology. More surprisingly, this theory is used in wireless communications.

Algebras $\mathbb{O}_{p,q}$

The definition and main properties of the series of algebras $\mathbb{O}_{p,q}$ generalizing the octonions are given in [7]. These algebras are graded by the abelian group $\mathbb{Z}_2^n$ (where $n = p + q$). The particular case $\mathbb{O}_{0,n}$ is related to the square identities. In particular, they allow us to realize Hurwitz-Radon $[r, 2^n, 2^n]$-identities as multiplicativity of norms. We obtain a very explicit formula that uses binary combinatorics :

$$\Big(\sum_{x\in A\subset\mathbb{Z}_2^n} a_x^2\Big)\Big(\sum_{y\in\mathbb{Z}_2^n} b_y^2\Big) = \sum_{z\in\mathbb{Z}_2^n}\Big(\sum_{x\in A}(-1)^{f_{\mathbb{O}_{0,n}}(x,x+z)}\,a_x b_{x+z}\Big)^2,$$

where $f_{\mathbb{O}_{0,n}} : \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ is a cubic function, and A is a subset of $\mathbb{Z}_2^n$ of cardinality r, that are explicitly given.

Our approach is quite similar to that of [Yuz81], but obtaining explicit formulas of the identities seems to be new. A thorough search in the literature on the Hurwitz-Radon identities, gave us only inductive procedure to construct the identities.

From a purely algebraic viewpoint, the series $\mathbb{O}_{p,q}$ is an interesting object. They have a natural $\mathbb{Z}_2^n$-grading, generalizing the $\mathbb{Z}_2^3$-grading on $\mathbb{O}$ due to [Eld98] ; they belong to the class of algebras considered in [AM99], i.e., their non-commutativity and non-associativity are controlled by the grading. The algebras $\mathbb{O}_{p,q}$ also have a strong similarity with the Clifford algebras $C\ell_{p,q}$. The criterion of simplicity for the $\mathbb{O}_{p,q}$ is established in [7] and the classification of these algebras up to graded-isomorphisms is completed in [11].

Beyond Hurwitz-Radon

The problem of Hurwitz is widely open in full generality. A large table of admissible triplets (r, s, N), for which there exists an $[r, s, N]$-identity, was obtained by numeric computations ; see [Sha00, Chap. 13].

Our method, based on the algebras $\mathbb{O}_{0,n}$, is applied [8] to construct infinitely many series of $[r, s, N]$-identities. We manage to obtain substantial extensions of the list of known examples of integral sums of squares identities. The identities that we obtain are proved to be *optimal* in terms of "orthogonal designs" [9]. These designs are matrix versions of square identities, and they are extensively used in the theory of information to construct optimal space-time block codes ; see [TJC99].

The Hurwitz-Radon theorem has various corollaries in additive combinatorics over $\mathbb{Z}_2^n$, as shown in [10].

A remark in the associative case

The Clifford algebras $C\ell_{p,q}$ with $n = p + q$ generators have a useful $\mathbb{Z}_2^n$-grading which is well-understood ; see [AM02]. Our contribution [5] [6] is a simple observation that there is a more natural grading over the *even subgroup* $(\mathbb{Z}_2^{n+1})_0$ of $\mathbb{Z}_2^{n+1}$.

Let us explain this in the case of the algebra of quaternions $\mathbb{H}$. Assign the following degrees to the standard basis elements $\{1, i, j, k\}$ of $\mathbb{H}$:

$$\bar{1} = (0\,0\,0), \qquad \bar{i} = (0\,1\,1), \qquad \bar{j} = (1\,0\,1), \qquad \bar{k} = (1\,1\,0).$$

The algebra $\mathbb{H}$ is then *graded-commutative*, i.e., for all homogeneous $a, b \in \mathbb{H}$

$$ab = (-1)^{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}\, ba,$$

where $\langle ., . \rangle$ is the usual scalar product on $\mathbb{Z}_2^3$. Graded-commutativity cannot be expressed in terms of the scalar product, if one uses a $\mathbb{Z}_2^2$-grading of $\mathbb{H}$.

A classification theorem of [6] shows that the above grading is, in some sense, universal.

Part II.3

A class of $\mathbb{Z}_2$-graded algebras called "Kaplansky superalgebras" [McC94], was rediscovered recently in the context of symplectic geometry [Ovs11]. They are particular cases of Jordan superalgebras but are also strongly related to Lie algebras ; they were called "Lie antialgebras" in [Ovs11].

Our contribution to this subject is twofold :

a) we study representations of these algebras,

b) we introduce a large class of examples related to Riemann surfaces.

A short survey [15] was written on the subject.

Geometric origin

The space $\mathbb{R}^{2|1}$, with coordinates $(p, q|\tau)$, equipped with the 2-form

$$\omega = dp \wedge dq + \frac{1}{2}\, d\tau \wedge d\tau$$

is the simplest example of a symplectic supermanifold. It was observed in [Ovs11] that, besides the Poisson bivector $\mathcal{P} := \omega^{-1}$, there is one more bivector field invariant under the action of the symplectic group $\mathrm{OSp}(1|2)$

$$\Lambda = \partial_\tau \wedge \mathcal{E} + \tau\, \partial_p \wedge \partial_q, \qquad \text{where} \quad \mathcal{E} = p\partial_p + q\partial_q + \tau\partial_\tau$$

is the Euler vector field. This bivector defines an algebraic structure on the space of functions. Remarkably, the linear functions form an algebra isomorphic to the *tiny Kaplansky superalgebra* $\mathcal{K}_3$, which is the smallest simple Jordan superalgebra.

Representations

Every Lie antialgebra $\mathfrak{a}$ corresponds to a Lie superalgebra $\mathfrak{g}_\mathfrak{a}$, and this correspondence is different from the standard Kantor-Koecher-Tits construction. The algebra $\mathfrak{a}$ is a $\mathfrak{g}_\mathfrak{a}$-module. For instance, $\mathfrak{g}_{\mathcal{K}_3}$ is $\mathbf{osp}(1,2)$.

A representation of $\mathfrak{a}$ is a representation of $\mathfrak{g}_\mathfrak{a}$ satisfying an extra condition [13]. It is an interesting property that selects some of the representations of $\mathfrak{g}_\mathfrak{a}$.

Representations of $\mathcal{K}_3$ are studied in [12]. They are exactly the representations of $\mathbf{osp}(1,2)$ for which the ghost Casimir element acts as $\frac{1}{4}\mathrm{Id}$. Every weighted representation of $\mathcal{K}_3$ is given by two operators A and B acting on a $\mathbb{Z}_2$-graded space $V = V_0 \oplus V_1$ and satisfying

$$AB - BA = \mathcal{E}, \qquad \text{where} \quad \mathcal{E}|_{V_0} = 0, \quad \mathcal{E}|_{V_1} = \mathrm{Id}.$$

This surprising version of the Heisenberg canonical relations can occur if either homogeneous part of V is infinite-dimensional.

The *universal enveloping algebra* $U(\mathfrak{a})$, is a quotient of $U(\mathfrak{g}_\mathfrak{a})$; see [13].

Punctured Riemann surfaces

The works [McC94] [Ovs11] contain few examples of Kaplansky-Jordan superalgebras. We construct in [14] a series of infinite-dimensional Kaplansky-Jordan superalgebras. The constructed algebras are associated to a punctured Riemann surface and give a Jordan analog of the Krichever-Novikov algebras ; see [KN87b]. The elements of the constructed algebras are meromorphic weighted densities on Riemann surfaces. Similar Jordan algebras were defined in a purely algebraic way in [Zhe09].

Table des matières

Résumé / Abstract i

Contents of the dissertation iii

I Frises 1

1 Frises de Coxeter-Conway . . . 2
- 1.1 Périodicité et symétrie glissée . . . 2
- 1.2 Entrées polynomiales et déterminants de André . . . 3
- 1.3 Phénomène de Laurent . . . 4
- 1.4 Frises entières positives et triangulations de polygones . . . 5
- 1.5 Graphe de Farey . . . 7

2 2-Frises . . . 8
- 2.1 Propriétés . . . 8
- 2.2 Coordonnées double zig-zag et phénomène de Laurent . . . 9
- 2.3 2-Frises entières . . . 10

3 Lien avec les algèbres amassées et variantes de frises . . . 11
- 3.1 Définition d'algèbre amassée . . . 11
- 3.2 Phénomène de Laurent . . . 13
- 3.3 Périodicité dans les algèbres amassées . . . 14
- 3.4 Frises de Coxeter-Conway et algèbres amassées de type A . . . 15
- 3.5 2-Frises et algèbres amassées de type A $\times$ A . . . 16
- 3.6 Autres types . . . 17
- 3.7 Remarques sur les preuves . . . 18

4 Trialité : SL_{k+1}-frises, équations en différence et espaces de modules . . . 19
- 4.1 Premiers exemples . . . 19
- 4.2 L'espace $\mathcal{F}_{k+1,n}$ . . . 21
- 4.3 L'espace $\mathcal{E}_{k+1,n}$ . . . 23
- 4.4 L'espace $\mathcal{C}_{k+1,n}$ . . . 24
- 4.5 Correspondance entre les espaces . . . 25
- 4.6 Transformée(s) de Gale . . . 26

5 Perspectives . . . 29
- 5.1 Points entiers dans les espaces de frises et dans les variétés amassées . . . 29
- 5.2 Opérateurs en différence commutants . . . 29
- 5.3 Frises, matrices unipotentes et Grassmanniennes . . . 30
- 5.4 Application pentagramme . . . 31

II Algèbres non-associatives **33**
1 Algèbres graduée-commutatives graduée-associatives 34
1.1 Matrices et algèbres de Clifford 34
1.2 Algèbres de groupes tordues 36
1.3 La série $\mathbb{O}_{p,q}$, définition(s) 39
1.4 La série $\mathbb{O}_{p,q}$, caractérisation 40
1.5 La série $\mathbb{O}_{p,q}$, classification 41
1.6 Perspectives 43
2 Applications : problème de Hurwitz et combinatoire binaire 44
2.1 Identités de sommes de carrés dans $\mathbb{O}_{0,n}$ 45
2.2 Nouvelles séries d'identités 46
2.3 Identités optimales et designs orthogonaux 48
2.4 Sumsets dans $\mathbb{Z}_2^n$ 49
3 Algèbres de Kaplansky-Jordan (antialgèbres de Lie) 51
3.1 Origine et premiers exemples 51
3.2 Théorie générale 53
3.3 Exemples à partir de surfaces de Riemann marquées 56
3.4 Perspectives 57

Références Partie I **59**

Références Partie II **63**

Travaux présentés **67**

Partie I

Frises

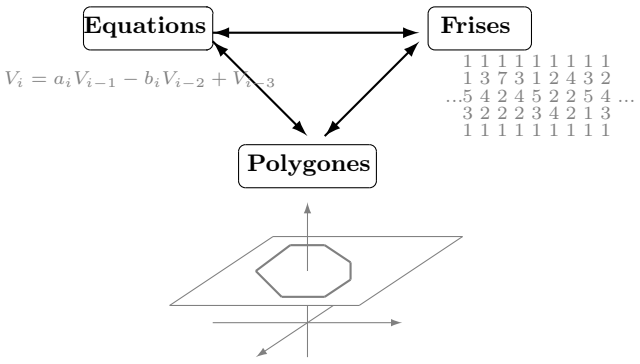
Les frises de nombres ont été introduites par Coxeter [Cox71]. Il s'agit d'arrangements de nombres dans le plan définis par une relation de récurrence. Coxeter utilise initialement ces frises pour écrire les relations du *pentagramma mirificum* de Gauss mais les relie également à d'autres notions classiques (suite de Farey, fractions continues, nombre de Fibonacci...). Avec Conway [CC73] ils établissent une correspondance surprenante entre les frises de nombres entiers positifs, et les triangulations des polygones.

Actuellement les frises connaissent un regain d'intérêt dû à leurs connections avec la théorie des algèbres amassées. Les propriétés de périodicité et de phénomène de Laurent dans les frises sont des incarnations de phénomènes plus généraux dans la théorie des algèbres amassées. Les frises offrent un support combinatoire supplémentaire pour étudier ces algèbres.

Les frises forment une branche d'une "trialité" complétée avec les équations linéaires en différence et les espaces de modules de polygones. Cette trialité est au coeur de notre travail et motivations pour l'étude des frises. Elle permet de combiner des idées de géométrie projective, analyse et combinatoire dans l'étude de ces espaces.

Le premier cas qui retient notre attention est celui des "2-frises". Ces objets paramétrisent les espaces de modules de polygones dans le plan projectif, et sont reliés aux equations en différence d'ordre 3.

Dans une première partie, on rappelle tout d'abord les résultats fondamentaux sur les frises de Coxeter-Conway, puis en partie 2 on présente les résultats analogues que nous obtenons pour les 2-frises, Dans la partie 3 on introduit la théorie des algèbres amassées en relation avec les frises. Finalement, en partie 4 on présente la trialité en toute généralité et on l'exploite autour de la transformée de Gale. Pour conclure, partie 5, on décrit les principaux projets de recherche en cours autour des frises.



1 Frises de Coxeter-Conway

Les frises de Coxeter [Cox71] sont des arrangements de nombres dans le plan se décrivant comme suit :

— Les nombres sont disposés dans un nombre fini de rangées infinies,
— La frise commence et se termine par une rangée de 1,
— Les rangées sont présentées en quinconce et toutes quatre entrées adjacentes a, b, c, d formant un losange $\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$ satisfont $ad - bc = 1$.

Le nombre de rangées strictement comprises entre les deux rangées limites de 1 est appelé *largeur* de la frise, et sera désigné par la lettre m. L'arrangement en (I.1) est un exemple de frise entière de largeur 4.

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
\text{rangée } 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\
\text{rangée } 1 & \cdots & & 4 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 2 & & 1 & \\
\text{rangée } 2 & & 3 & & 7 & & 1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 1 & & \cdots \\
\text{rangée } 3 & \cdots & & 5 & & 3 & & 1 & & 3 & & 7 & & 1 & & 2 & \\
\text{rangée } m & & 3 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 2 & & 1 & & \cdots \\
\text{rangée } m+1 & \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array} \tag{I.1}$$

Un fragment de frise suffit "génériquement" à déterminer toute la frise. Quelques valeurs initiales bien disposées permettent de compléter la frise en utilisant la règle unimodulaire. L'utilisation de la règle implique une division pour déduire l'une des valeurs à partir de trois autres voisines. On supposera dans la suite que les frises sont *génériques* dans le sens où elles ne contiennent pas de 0 entre les rangées de 1.

La définition de frises fait sens pour tout anneau unitaire, on pense donc en premier lieu à des frises de nombres entiers, réels ou complexes. Conway et Coxeter ont classifié les frises de nombres entiers strictement positifs. La construction de telles frises et loin d'être évidente *a priori*, du fait des divisions impliquées par la règle unimodulaire.

Dans cette partie, on rappelle les principaux résultats de [Cox71] et [CC73]. On commence par des propriétés géométriques des frises au paragraphe §1.1, puis des propriétés algébriques au §1.2. On énonce le théorème de classification des frises entières §1.4. Pour finir, on présente en §1.5, un des résultats de [4] revisitant le théorème de classification à l'aide du graphe de Farey.

1.1 Périodicité et symétrie glissée

Les frises de nombres de Coxeter-Conway rentrent dans la catégorie plus large des frises géométriques, définies comme partie du plan dans lequel un motif se répéte périodiquement le long d'une direction donnée. Ces frises géométriques sont classifiées en 7 types, [Pol54, p88], voir aussi [Cox69, p47].

Théorème 1.1 ([Cox71])**.** *Les rangées dans une frise de largeur m sont périodiques de période $n = m + 3$.*

Coxeter prouve une version plus forte de la périodicité, en décomposant la translation laissant la frise invariante comme le carré d'un symétrie glissée. Rappelons qu'une symétrie glissée est la composition d'une réflexion par rapport à une droite et d'une translation dirigée par la même droite.

Théorème 1.2 ([Cox71])**.** *Les frises sont invariantes par symétrie glissée le long de la droite médiane.*

Autrement dit, une frise consiste en un domaine fondamental, par exemple triangulaire, se réfléchissant et se répétant dans une bande.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
\dots & & 4 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 2 & & 1 & & \dots \\
 & 3 & & 7 & & 1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 1 & & 3 & & 7 & & 1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 1 & & \\
\dots & & 5 & & 3 & & 1 & & 3 & & 7 & & 1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 1 & & 3 & & 7 & & 1 & & 2 & & \dots \\
 & 3 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 2 & & 1 & & \\
\dots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots
\end{array}$$

Notation 1. Dans la suite les frises sont vues comme des applications $I \to \mathcal{A}$ où I est un ensemble d'indices contenus dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $\mathcal{A}$ un anneau unitaire commutatif. Pour les frises de Coxeter-Conway, on désigne par la lettre e cette application $I \to \mathcal{A}$, et on choisit $I = \{(i,j) : i \leq j \leq i+m-1\}$. Dans la représentation de la frise dans le plan, le premier indice i est constant sur une diagonale Nord-Ouest Sud-Est, et le deuxième indice j constant sur une diagonale Sud-Ouest Nord-Est. Par périodicité de la frise on peut considérer les indices modulo $n = m + 3$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\
 & e_{1,1} & & e_{2,2} & & \cdots & & e_{i,i} & & \cdots & & e_{n,n} & & e_{1,1} & \\
\cdots & & e_{1,2} & & e_{2,3} & & \cdots & & e_{i,i+1} & & \cdots & & e_{n,1} & & \cdots \\
 & e_{n,2} & & e_{1,3} & & e_{2,4} & & \cdots & & e_{i,i+2} & & \cdots & & e_{n,2} & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

Par convention, on pose $e_{i,i-1} = e_{i,i+m} = 1$ et $e_{i,i-2} = e_{i,i+m+1} = 0$.

Il est important de souligner que la frise $(e_{i,j})$ et la frise $(e'_{i,j})$ avec $e'_{i,j} := e_{i+1,j+1}$ ont les mêmes représentations dans le plan mais sont considérées comme différentes, car données par des applications $I \to \mathcal{A}$ différentes.

1.2 Entrées polynomiales et déterminants de André

Considérons une frise de largeur $m = n - 3$. Notons $a_1, a_2, \dots, a_n$ un cycle de n entrées consécutives disposées sur la première rangée, de sorte que $a_i = e_{i,i}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & a_1 & & a_2 & & \cdots & & a_n & & a_1 & \\
\cdots & & a_1a_2 - 1 & & a_2a_3 - 1 & & \cdots & & a_na_1 - 1 & & \cdots \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

En utilisant la règle unimodulaire, on peut déduire de la première rangée les valeurs de la 2ème rangée, puis de la troisième etc... On utilise alors successivement des formules du type $c = \frac{ad-1}{b}$. On s'attend à exprimer les entrées de la frise comme des fractions rationnelles en a_i. Un premier "miracle" de simplification s'opère.

Théorème 1.3 ([Cox71]). *Les entrées de la frise s'expriment comme des polynômes en les a_i, donnés par la formule déterminantale suivante*

$$e_{i,j} = \begin{vmatrix} a_i & 1 & & & \\ 1 & a_{i+1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a_{j-1} & 1 \\ & & & 1 & a_j \end{vmatrix}. \tag{I.2}$$

Remarque 1.4. Le déterminant (I.2) est un premier exemple des *déterminants d'André* utilisés dans la résolution d'équations en différences finies, [And78], [Jor39]. Le lien avec les équations en différences et les généralisations sera présenté en §4. À noter également que dans le cas où la suite est constante, disons $a_i = 2x$, le déterminant (I.2) d'ordre k donne le k-ième polynôme de Tchebychev de 2nde espèce $U_k(x)$.

1.3 Phénomène de Laurent

On note $x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}$ les valeurs sur la diagonale Nord-Ouest Sud-Est $e_{0,-1}, e_{0,0}, \ldots, e_{0,n-3}$ (NB $x_0 = x_{n-2} = 1$).

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\
\cdots & & x_1 & & e_{1,1} & & e_{2,2} & & \cdots & & e_{n-3,n-3} & & x_{n-3} & \\
 & & & x_2 & & e_{1,2} & & \cdots & & e_{n-4,n-3} & & \iddots & & \\
 & & & & \ddots & & \cdots & & \cdots & & \iddots & & & \\
 & & & & & x_{n-3} & & e_{1,n-3} & & x_1 & & & & \\
\cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots &
\end{array}$$

En utilisant la règle unimodulaire, de proche en proche on peut déduire de la diagonale de x_i les valeurs sur les autres diagonales. On utilise alors successivement des formules du type $d = \frac{bc+1}{a}$. On s'attend à exprimer les entrées de la frise comme fractions rationnelles en x_i. Un deuxième "miracle" de simplification s'opère.

Théorème 1.5 ([Cox71] [CR94]). *Les entrées de la frise s'expriment comme des polynômes de Laurent à coefficients entiers positifs en les x_i, $1 \leq i \leq n-3$, donnés par la formule suivante*

$$e_{i,j} = x_{i-1}x_{j+1}\left(\frac{1}{x_{i-1}x_i} + \frac{1}{x_i x_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{x_j x_{j+1}}\right). \tag{I.3}$$

Ce théorème n'est pas énoncé sous cette forme dans les références mentionnées. La simplification des fractions rationnelles en polynômes de Laurent est une conséquente immédiate des résultats de [Cox71] combinant le Théorème 1.3 et le fait que $a_i = \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{x_i}$, $1 \leq i \leq n-3$, (formules données en §6 et §7 dans [Cox71]). Cependant, cette approche ne permet pas de déduire la positivité des coefficients. La formule explicite a été donnée plus tard dans [CR94].

Remarque 1.6. Ce phénomène de simplification appelé *phénomène de Laurent* a été interprété dans un contexte plus large dans [FZ02a] et [FZ02b]. On peut déduire un énoncé plus général que celui du Théorème 1.5 :

Théorème 1.7. *Les entrées de la frise s'expriment comme des polynômes de Laurent à coefficients entiers positifs en les entrées* $(x_i)_{1\leq i\leq n-3}$*, disposées en zig-zag dans la frise.*

Ici "zig-zag" signifie que x_{i+1} est placée soit immédiatement en dessous à droite, soit immédiatement en dessous à gauche, de x_i, sans nécessairement alterner.

Exemple 1.8. Pour illustrer les propriétés des frises, périodicité, symétrie glissée, phénomène de Laurent, un bon exemple/exercice est de calculer formellement une frise de largeur 2, en prenant deux inconnues x_1, x_2 sur une diagonale. Le résultat est la frise suivante.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\
\cdots & & x_2 & & \frac{1+x_2+x_1}{x_2x_1} & & & x_1 & & \frac{1+x_2}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & x_2 & \\
 & x_1 & & \frac{1+x_2}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & & x_2 & & \frac{1+x_2+x_1}{x_2x_1} & & x_1 & & \cdots \\
\cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

1.4 Frises entières positives et triangulations de polygones

Conway et Coxeter se sont intéressés au problème des frises à valeurs entières positives. Les théorèmes 1.3 et 1.5 donnent deux corollaires immédiats à ce sujet.

Corollaire 1.9. *Étant donnée une frise, si sa première rangée contient uniquement des entiers alors toutes les autres valeurs de la frise sont entières.*

Corollaire 1.10. *Étant donnée une frise, si elle contient un zig-zag de 1 alors toutes les valeurs de la frise sont entières positives.*

En remarquant que $a_i = \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{x_i}$, les théorèmes 1.3 et 1.5 peuvent être également combinés pour obtenir le critère suivant.

Corollaire 1.11. *Étant donnée une frise, si les entrées* $x_1, \ldots, x_m$ *sur une diagonale sont des entiers positifs tels que* x_i *divise* $x_{i-1} + x_{i+1}$*, pour tout* $1 \leq i \leq m$ *(avec la convention* $x_0 = x_{m+1} = 1$*), alors toutes les valeurs de la frise sont entières positives, et réciproquement.*

Le Corollaire 1.10 donne ainsi un moyen très simple de construire des frises entières positives : il suffit de disposer des 1 en zig-zag dans une frise de n'importe quelle largeur puis de compléter par la règle unimodulaire pour obtenir une frise entière positive. On peut par exemple de cette manière obtenir la frise (I.1).

Cependant toutes les frises entières positives ne s'obtiennent pas nécéssairement de cette manière, comme le montre le contre-exemple ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\
\cdots & & 1 & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 3 & \\
 & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots \\
\cdots & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots
\end{array}$$

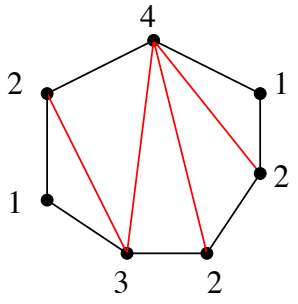
De manière inattendue, toutes les frises entières positives se construisent à partir de polygones triangulés. La correspondance frises-polygones est un résultat dû à Conway, présenté dans [CC73], qui donne la classification complète des frises entières positives.

Théorème 1.12 ([CC73])**.** *Les frises entières positives de largeur $m = n-3$ sont en bijection avec les triangulations d'un polygone à n sommets. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est un cycle de n entrées consécutives sur la première rangée de la frise, alors a_i est le nombre de triangles incidents au i-ème sommet du n-gone triangulé correspondant.*

La démonstration de ce théorème est faite par récurrence dans [CC73], par des procédés d'augmentation et de réduction des frises correspondants à un ajout ou suppression d'un sommet dans le polygone triangulé. Dans [4] nous avons proposé une autre compréhension du théorème basée sur la theorie de Farey, voir §1.5 plus bas.

Définition 1.13. [CC73] Une suite finie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est appelé *quiddité* si elle définit la première rangée d'une frise entière positive, ou de manière équivalente, si elle donne les nombres de triangles incidents aux sommets d'un n-gone triangulé. On parle de manière équivalente de quiddité d'une frise ou quiddité d'un polygone triangulé.

Exemple 1.14. La frise (I.1) admet $4, 2, 1, 3, 2, 2, 1$ comme quiddité et correspond à l'heptagone triangulé suivant, dans lequel on a attaché à chaque sommet les nombres de triangles incidents. On ordonne les sommets en sens inverse des aiguilles d'une montre, le premier sommet étant celui du haut..



Corollaire 1.15. *Pour une largeur fixée m, il existe un nombre fini de frises de Coxeter-Conway à valeurs entières positives, donné par le nombre de Catalan :*

$$C_{m+1} = \frac{1}{m+1}\binom{2(m+1)}{m+1}$$

Remarque 1.16. Les valeurs dans la frise en dehors de la première rangée ont également des interprétations combinatoires dans le polygone triangulé correspondant. Dans [CC73], une procédure de comptage est proposée à partir du polygone triangulé pour obtenir les valeurs diagonale par diagonale. Dans [BCI74], les valeurs de la frise comptent des chemins de triangles entre paires de sommets du polygone triangulé. Une autre interprétation combinatoire est donnée dans [Cun13] où les entrées expriment des coordonnées des racines d'un groupoïde de Weyl.

1.5 Graphe de Farey

Dans [Cox71], Coxeter évoque les suites de Farey pour construire des frises entières en utilisant le critère donné au Corollaire 1.11. Dans [4], on développe ce lien plus précisément avec le graphe de Farey.

Le graphe de Farey a pour sommets les éléments de $\mathbb{Q} \cup \infty$. Les nombres rationnels sont représentés en fractions irréductibles et ∞ est représenté par $\frac{1}{0}$. Deux sommets $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ sont reliés par une arête si et seulement si $q_1 p_2 - q_2 p_1 = 1$.

Définition 1.17. On appelle polygone de Farey toute suite de rationnels $v_1 < v_2 < \ldots < v_n$ telle que deux éléments consécutifs, ainsi que v_1 et v_n, sont reliés par une arête dans le graphe de Farey. Le polygone est dit *normalisé* si $v_1 = \frac{0}{1}$ et $v_n = \frac{1}{0}$.

On utilise une propriété classique du graphe de Farey.

Proposition 1.18. *Un polygone de Farey est triangulé par les arêtes du graphe de Farey.*

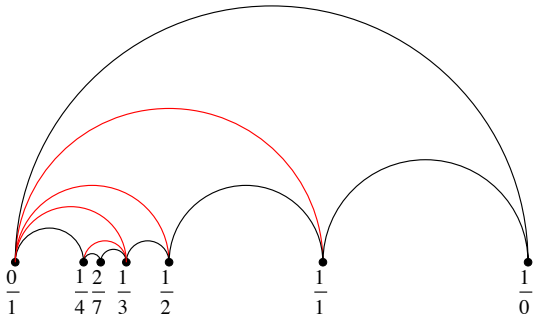
La proposition ci-dessus est une conséquence rapide de la construction du graphe de Farey par récurrence sur les dénominateurs des fractions.

Théorème 1.19 ([4])**.** *(i) Les frises entières positives sont en bijection avec les polygones de Farey normalisés.*

(ii) Le quotient des deux premières diagonales de la frise donne le polygone de Farey normalisé dont la quiddité coïncide avec celle de la frise.

Plus précisément, en reprenant les notations de §1.2, le polygone de Farey s'obtient par exemple en posant $v_i = e_{2,i-1}/e_{1,i-1}$ (avec la convention $e_{2,0} = 0 = e_{1,n-1}$).

Exemple 1.20. Pour la frise (I.1), en quotientant les deux premières diagonales $e_{1,\bullet} = (1, 4, 7, 3, 2, 1, 0)$ et $e_{2,\bullet} = (0, 1, 2, 1, 1, 1, 1)$ on obtient la suite $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$ qui se plonge dans le graphe de Farey comme suit



En "redressant" ce polygone on retrouve celui de l'exemple 1.14.

Remarque 1.21. Dans [4], on utilise également les polygones de Farey pour classifier les SL_2-pavages doublement périodiques avec motif rectangulaire entier positif.

Remarque 1.22. Le choix de deux diagonales consécutives dans la construction d'un polygone de Farey à partir d'une frise est arbitraire. Différents choix correspondent à des polygones *équivalents* par homographie et permutation cyclique. Cette observation est une illustration d'un lien profond entre les frises et la géométrie hyperbolique, et, plus généralement, la géométrie projective.

2 2-Frises

La variante des 2-frises a été introduite indépendamment dans [Pro05] et [1]. La principale motivation à l'étude des 2-frises dans [1] est d'ordre géométrique. Ces objets paramétrent un certain espace de modules de polygones (voir §4). La combinatoire des 2-frises est très riche, et se présente comme un analogue en "dimension supérieure" des frises de Coxeter-Conway.

Définition 2.1 ([Pro05],[1])**.** Les 2-frises sont des arrangements de nombres dans le plan satisfaisant les conditions suivantes :

— les nombres sont disposés dans un nombre fini de rangées infinies,
— la frise commence et se termine par une rangée de 1,
— toute entrée dans la frise est égale au déterminant de la matrice formée par les quatre entrées adjacentes. Autrement dit

$$\begin{matrix} * & b & * \\ a & e & d \\ * & c & * \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad ad - bc = e.$$

À nouveau le nombre de rangées strictement entre les rangées limites de 1 est appelé *largeur* de la 2-frise

Exemple 2.2. L'arrangement ci-dessous est un exemple de 2-frise de largeur 4.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & 3 & 7 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 10 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & \cdots \\ \cdots & 11 & 5 & 10 & 6 & 2 & 2 & 2 & 2 & 8 & 15 & 5 & 7 & 5 & 1 & 1 & 7 & \cdots \\ \cdots & 8 & 15 & 5 & 7 & 5 & 1 & 1 & 7 & 11 & 5 & 10 & 6 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots \\ \cdots & 2 & 5 & 10 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 7 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots \\ \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \end{array} \tag{I.4}$$

2.1 Propriétés

On paramètre les entrées d'une 2-frise par des couples d'entiers ou des couples de demi-entiers de la manière suivante.

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & v_{i-1,i-1} & v_{i-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} & v_{i,i} & v_{i+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} & v_{i+1,i+1} & \cdots \\ \cdots & v_{i-\frac{1}{2},i-\frac{3}{2}} & v_{i,i-1} & v_{i+\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} & v_{i+1,i} & v_{i+\frac{3}{2},i+\frac{1}{2}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \end{array}$$

L'ensemble des indices est $\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \cup (\frac{1}{2}+\mathbb{Z})^2 \ : \ 0 \leq i-j \leq m-1\}$, où m est la largeur. On désigne plus simplement les entrées de la première rangée par

$$a_i := v_{i,i}\,, \qquad b_i := v_{i-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}}.$$

On peut alors formuler les analogues des Théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3, par les Théorèmes 2.3, 2.4 et 2.5, respectivement.

Théorème 2.3 ([1]). *Toute 2-frise de largeur $m = n-4$ est $2n$-périodique, i.e. $v_{i,j} = v_{i+n,j+n}$.*

Théorème 2.4 ([1]). *Les 2-frises sont invariantes par symétrie glissée, i.e. $v_{i,j} = v_{j+n-\frac{5}{2},i+\frac{5}{2}}$, où $n-4 = m$ est la largeur de la 2-frise.*

On peut visualiser ces propriétés sur l'exemple (I.4) avec l'illustration suivante.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	3	7	4	2	2	2	2	2	2	5	10	3	1	2	3	2	3	7	4	2	2	2	...
	11	5	10	6	2	2	2	2	8	15	5	7	5	1	1	7	11	5	10	6	2	2	
	8	15	5	7	5	1	1	7	11	5	10	6	2	2	2	2	8	15	5	7	5	1	
...	2	5	10	3	1	2	3	2	3	7	4	2	2	2	2	2	2	5	10	3	1	2	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

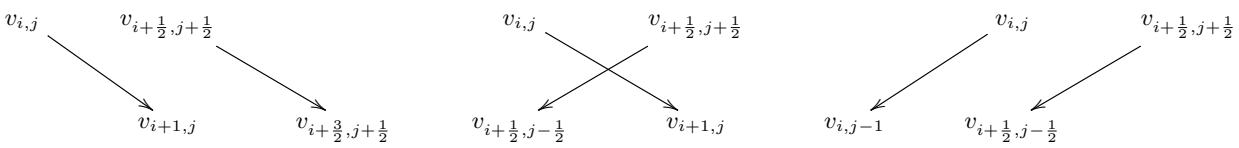
Théorème 2.5 ([1]). *Les entrées d'une 2-frise s'expriment comme des polynômes en les entrées de la première rangée, donnés par les formules déterminantales*

$$v_{i,j} = \begin{vmatrix} a_j & b_{j+1} & 1 & & & \\ 1 & a_{j+1} & b_{j+2} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a_{i-2} & b_{i-1} & 1 \\ & & & 1 & a_{i-1} & b_i \\ & & & & 1 & a_i \end{vmatrix}, \quad v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} b_{j+1} & a_{j+1} & 1 & & & \\ 1 & b_{j+2} & a_{j+2} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & b_{i-1} & a_{i-1} & 1 \\ & & & 1 & b_i & a_i \\ & & & & 1 & b_{i+1} \end{vmatrix}$$

où i et j sont entiers.

2.2 Coordonnées double zig-zag et phénomène de Laurent

Définition 2.6. On appelle *double zig-zag* dans une 2-frise, une paire de chemins continus linéaires par morceaux tracés entre la première et la dernière rangée, de sorte que d'une rangée à l'autre on soit dans l'une des trois configurations suivantes :



Pour une 2-frise de largeur m on note également x_i les entrées disposées dans un double zig-zag, de sorte que $x_1 = v_{0,0}$ et $x_{m+1} = v_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

Exemple 2.7. Par exemple, on a les deux situations extrêmes suivantes, où le double zig-zag

consiste en deux diagonales consécutives ou deux colonnes consécutives.

$$\begin{array}{ccccccccc|cccccc}
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & & & & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
 & & x_1 & x_{m+1} & & & & & & & & x_1 & x_{m+1} & & \\
 & & & x_2 & x_{m+2} & & & & & & & x_{m+2} & x_2 & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & & & & & & x_3 & x_{m+3} & & \\
 & & & & & x_m & x_{2m} & & & & & \vdots & \vdots & & \\
 & & & & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots
\end{array}, \tag{I.5}$$

Théorème 2.8 ([1]). *Les variables $x_1, \ldots, x_{2m}$ disposées en double zig-zag définissent une unique 2-frise à valeur dans $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_{2m})$.*

Le théorème ci-dessus est un théorème d'existence, avec les valeurs données *a priori* comme fractions rationnelles. En fait, il existe aussi un phénomène de Laurent pour les 2-frises, et le théorème ci-dessous est un analogue du Théorème 1.5 (voir aussi remarque 1.6).

Théorème 2.9 ([1]). *Les entrées d'une 2-frise s'expriment comme polynômes de Laurent à coefficients entiers positifs en les variables $x_1, \ldots, x_{2m}$ disposées en double zig-zag.*

Ce théorème répond en particulier à la conjecture énoncée dans [Pro05, §6].

Exemple 2.10. Pour les petites largeurs de frises, on peut calculer les valeurs des entrées assez facilement.
Cas $m = 1$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & x_1 & x_2 & \frac{x_2+1}{x_1} & \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} & \frac{x_1+1}{x_2} & x_1 & x_2 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots
\end{array}$$

Cas $m = 2$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & x_1 & x_3 & \frac{x_3+x_2}{x_1} & \frac{(x_3+x_2)(x_4+x_1)}{x_1x_3x_4} & \frac{(x_1+x_4)(x_2+x_3)}{x_2x_3x_4} & \frac{x_1+x_4}{x_2} & x_4 & x_2 & \cdots \\
\cdots & x_4 & x_2 & \frac{x_2+x_3}{x_4} & \frac{(x_2+x_3)(x_1+x_4)}{x_4x_2x_1} & \frac{(x_4+x_1)(x_3+x_2)}{x_3x_1x_2} & \frac{x_4+x_1}{x_3} & x_1 & x_3 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots
\end{array}$$

2.3 2-Frises entières

À nouveau on peut s'intéresser à la problématique des 2-frises à valeurs entières positives. La construction de telles frises n'est pas évidente puisque la règle de récurrence implique des divisions. Les Théorèmes 2.5 et 2.9 ont deux corollaires immédiats.

Corollaire 2.11. *Étant donnée une 2-frise, si sa première rangée contient uniquement des entiers alors toutes les autres valeurs de la frise sont entières.*

Corollaire 2.12. *Étant donnée une 2-frise, si elle contient un double zig-zag de 1 alors toutes les valeurs de la frise sont entières positives.*

Le Corollaire 2.11 ne fournit pas un procédé de construction satisfaisant. En partant d'une suite d'entiers (b_i, a_i) de période $2n$ sur la première rangée, on peut compléter les rangées suivantes en utilisant la règle de récurrence (ou les formules déterminantales) mais partir d'une suite arbitraire ne permet pas d'obtenir la rangée limite de 1 en bas de la frise.

Le Corollaire 2.12 permet lui de construire des 2-frises entières positives de taille arbitraire en disposant des 1 en double zig-zag, mais les 2-frises entières positives ne s'obtiennent pas toute de cette façon (par exemple la frise (I.4)).

Contrairement aux frises de Coxeter-Conway, les 2-frises entières ne contiennent pas nécessairement de 1. La 2-frise suivante est exceptionnelle en un certain sens, voir § 3.7.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \tag{I.6}$$

Il n'existe à ce jour pas d'analogue du Théorème 1.12, c'est à dire de correspondance entre les 2-frises entières positives et des ensembles d'objets de type combinatoire énumérative. En revanche on a des informations sur le nombre de 2-frises entières pour une largeur fixée. Cette fois-ci la situation diffère du cas des frises de Coxeter-Conway (voir Corollaire 1.15).

Théorème 2.13 ([2]). *Pour une largeur fixée $m > 4$, il existe une infinité de 2-frises à valeurs entières positives.*

La preuve de ce théorème repose sur la théorie des algèbres amassés de type fini et sera discutée également en § 3.7. Dans le cas des petites largeurs,

- pour $m = 1$ et $m = 2$, il existe exactement 5 et 51, respectivement, 2-frises entières positives ; ces valeurs ont été annoncées dans [Pro05] et prouvées dans [1],
- pour $m = 3$, il existe (au moins) 868 frises entières positives ; ces frises ont été énumérées par ordinateur par deux programmes indépendants (celui du REACH, cf [Pro05] et celui de Rich Schwartz, cf [1]), et probablement il s'agit de la liste complète,
- pour $m = 4$, il existe au moins 25080 frises entières positives ; [2].

Conjecture. Pour $m = 3$ et $m = 4$ il existe un nombre fini de 2-frises entières positives.

3 Lien avec les algèbres amassées et variantes de frises

La périodicité et le phénomène de Laurent dans les frises de Coxeter-Conway sont des incarnations de phénomènes plus généraux apparaissant dans la théorie des algèbres amassées de Fomin-Zelevinsky. Un lien précis entre frises et algèbres amassées a été établi dans [CC06], provoquant un regain d'intérêt pour les frises et l'étude de nouvelles variantes voir références données en §3.6 .

3.1 Définition d'algèbre amassée

On donne ici une définition pour les algèbres amassées. Cette définition n'est pas formulée dans le cadre le plus général possible mais sous une forme suffisante pour la suite (plus précisément, on se restreint au cas dit "antisymétrique" et sans "variables gelées"). La définition ci-dessous inclut la définition de termes supplémentaires : graine, mutation, amas, variable amassée. Pour plus de détail sur le sujet on peut suggérer les notes et livres suivants [Kel10], [Kel11], [Mar13], [GSV10].

Définition 3.1 ([FZ02a])**.** Soit $\mathcal{Q}$ un graphe orienté (souvent appelé *carquois*) supposé sans 1-cycle ni 2-cycle (i.e. sans flèche partant de et arrivant à un même sommet, et sans flèches de sens opposés entre deux mêmes sommets). On désigne par N le nombre de sommets dans $\mathcal{Q}$ et l'on identifie l'ensemble des sommets avec l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$. L'algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ associée au graphe $\mathcal{Q}$ est une sous-algèbre du corps des fractions $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_N)$ en N variables $x_1, \ldots, x_N$, définie par générateurs et relations à l'aide d'un procédé récursif de mutations de graines décrit ci-dessous.

Une *graine* est un couple

$$\Sigma = (\{t_1, \ldots, t_N\},\ \mathcal{R})\,,$$

où $\mathcal{R}$ est un graphe orienté à N sommets et $\{t_1, \ldots, t_N\}$ un ensemble de générateurs libres de $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_N)$ indexés par les sommets de $\mathcal{R}$.

La *mutation au sommet* k de la graine Σ est une nouvelle graine $\mu_k(\Sigma)$ definie par

- $\mu_k(\{t_1, \ldots, t_N\}) = \{t_1, \ldots, t_{k-1}, t'_k, t_{k+1}, \ldots, t_N\}$ où

$$t_k\, t'_k = \prod_{\substack{\text{flèches dans } \mathcal{R} \\ i \to k}} t_i \quad + \quad \prod_{\substack{\text{flèches dans } \mathcal{R} \\ i \leftarrow k}} t_i \tag{I.7}$$

- $\mu_k(\mathcal{R})$ est le graphe orienté obtenu à partir de $\mathcal{R}$ en appliquant la suite de transformations suivante
  (a) pour tout chemin $i \to k \to j$ dans $\mathcal{R}$, ajouter une flèche $i \to j$,
  (b) renverser l'orientation de toutes les flèches incidentes au sommet k,
  (c) supprimer les possibles 2-cycles crées au cours des transformations.

(voir Exemple 3.3 ci-dessous pour des exemples de mutations).

Partant de la graine initiale $\Sigma_0 = (\{x_1, \ldots, x_N\}, \mathcal{Q})$, on produit N nouvelles graines $\mu_k(\Sigma_0)$, $k = 1, \ldots, N$, à partir desquelles on peut à nouveau muter, et ainsi de suite. Les ensembles de fractions rationnelles apparaissant dans les graines générées par mutations sont appelés *amas*. Les fractions contenues dans un amas sont appelées *variables d'amas* ou *variables amassées*. L'algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ est la sous-algèbre de $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_N)$ engendrée par l'ensemble des variables d'amas.

Remarque 3.2. Mentionnons quelques propriétés et notions importantes relatives aux algèbres amassées, utiles pour la suite.

1. Les mutations sont des involutions.
2. Les graines sont considérées à "isomorphisme près" (deux graines étant isomorphes si après renumérotation des sommets, les graphes orientés sont isomorphes et les variables attachées aux sommets identiques).
3. Le processus de mutation peut dans certains cas engendrer un nombre fini de graines distinctes, on parle alors d'*algèbre amassée de type fini*.
4. Les algèbres amassées de type fini sont classifiées à l'aide des diagrammes de Dynkin [FZ03]. Avec la définition donnée ci-dessus (cas anti-symétrique), les algèbres amassées de type fini sont en bijection avec les diagrammes de Dynkin simplement lacés (type A, D, E).
5. Les algèbres amassées réelles ou complexes se définissent par $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}(\mathcal{Q})$ ou $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}(\mathcal{Q})$.

Exemple 3.3. Prenons $N = 4$, et considérons la graine $\Sigma = (\{t_1, t_2, t_3, t_4\}, \mathcal{R})$, où

$$\mathcal{R} = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\ 3 \arrow[u] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

La mutation au sommet 1 donne

$$\mu_1(\{t_1,\, t_2,\, t_3,\, t_4\}) = \left\{\frac{t_2+t_3}{t_1},\, t_2,\, t_3\,, t_4\right\}, \quad \mu_1(\mathcal{R}) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & 2 \arrow[l] \arrow[d] \\ 3 \arrow[ur] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Puis en appliquant par exemple une mutation au sommet 3, on obtient

$$\mu_3\mu_1(\{t_1,\, t_2,\, t_3,\, t_4\}) = \left\{\frac{t_2+t_3}{t_1},\, t_2,\, \frac{t_1t_2+t_2t_4+t_3t_4}{t_1t_3},\, t_4\right\}, \quad \mu_3\mu_1(\mathcal{R}) = \begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[dl] \\ 3 \arrow[u] \arrow[r] & 4 \end{tikzcd}$$

Illustrons aussi la notion de graine isomorphe, en renommant les sommets 2 et 3 on obtient la graine isomorphe suivante

$$\frac{t_2+t_3}{t_1},\, \frac{t_1t_2+t_2t_4+t_3t_4}{t_1t_3},\, t_2,\, t_4, \qquad \begin{tikzcd} 1 & 3 \arrow[dl] \\ 2 \arrow[u] \arrow[r] & 4 \end{tikzcd}$$

Le dernier graphe obtenu correspond à une orientation du diagramme de Dynkin de type D_4. Dans ce cas on sait que l'algèbre amassée correspondante $A(\mathcal{R})$ est de type fini, possédant 16 variables d'amas réparties en 50 amas.

3.2 Phénomène de Laurent

Par construction les variables d'amas dans une algèbre amassée sont des expressions rationnelles sans signe moins en les variables initiales. En fait [FZ02a] prouve un résultat beaucoup plus fort.

Théorème 3.4 (Phénomène de Laurent [FZ02a])**.** *Dans une algèbre amassée, fixant une graine Σ, toute variable amassé s'exprime comme polynôme de Laurent à coefficients entiers en les variables d'amas de Σ.*

Le résultat suivant avait été conjecturé dans [FZ02a].

Théorème 3.5 (Positivité [LS13])**.** *Les coefficients des polynômes de Laurent donnés dans le Théorème 3.4 sont positifs.*

Cette conjecture a été montrée dans de nombreux cas avant la preuve unifiée dans le cas anti-symétrique de [LS13] (voir l'historique donné dans *loc. cit.*).

Il est à noter que les variables amassées en tant que fractions rationnelles sont sans signe moins mais ceci n'implique pas la positivité des coefficients après simplification en polynômes de Laurent, comme l'illustre l'identité suivante : $\frac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1$.

3.3 Périodicité dans les algèbres amassées

On dit qu'un graphe $\mathcal{Q}$ est biparti si on peut associer un signe $\varepsilon(i) = \pm$ à chaque sommet i de $\mathcal{Q}$ de sorte que deux sommets connectés par une arête n'aient jamais le même signe. Par exemple le graphe $\mathcal{R}$ de l'exemple 3.3 est biparti car on peut faire le choix $\varepsilon(1) = \varepsilon(4) = +$ et $\varepsilon(2) = \varepsilon(3) = -$. Dans un graphe biparti le choix de $\varepsilon(1)$ détermine le signe de tous les autres sommets. Dans les illustrations qui suivent on adopte la convention suivante pour les sommets des graphes bipartis :

$$\bullet = +\,, \quad \circ = -\,.$$

On dit qu'un graphe biparti est avec orientation alternée, si tout sommet à signe positif est une source (i.e. toute flèche incidente à ce sommet part de ce sommet) et tout sommet à signe négatif est un puits (i.e. toute flèche incidente à ce sommet pointe vers ce sommet).

On considère les compositions de mutations suivantes

$$\mu_+ = \prod_{i:\varepsilon(i)=+} \mu_i, \qquad \mu_- = \prod_{i:\varepsilon(i)=-} \mu_i.$$

On peut noter que les mutations μ_i avec $\varepsilon(i)$ fixé commutent entre elles, ainsi l'ordre dans les produits ci-dessus n'a pas d'importance. On peut noter également que μ_+ ou μ_- appliquée à $\mathcal{Q}$ avec orientation alternée donne le même graphe mais avec l'orientation opposée :

$$\mu_+(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}^{\mathrm{op}}, \qquad \mu_-(\mathcal{Q}^{\mathrm{op}}) = \mathcal{Q}.$$

Définition 3.6 ([FZ07])**.** Soit $\mathcal{Q}$ un graphe biparti. La *ceinture bipartie* est l'ensemble des graines de l'algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ obtenues à partir de la graine initiale Σ_0 en appliquant successivement μ_+ ou μ_- :

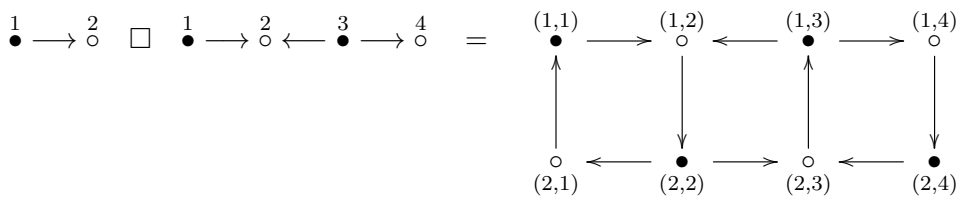
$$\Sigma_0, \quad \mu_\pm(\Sigma_0), \quad \mu_\mp\mu_\pm(\Sigma_0), \quad \mu_\pm\mu_\mp\mu_\pm(\Sigma_0), \quad \ldots \tag{I.8}$$

On énonce ci-après un phénomène de périodicité dans les algèbres amassées définies par un graphe biparti construit à partir d'une paire de diagrammes de Dynkin. On adopte les notations de [Kel10]. Plus précisément, considérons Δ et Δ' deux diagrammes de Dynkin. Ces diagrammes sont bipartis et on les suppose orientés avec une orientation alternée. Le graphe produit $\mathcal{Q} = \Delta\square\Delta'$ a pour sommet l'ensemble $\Delta \times \Delta'$, et les arêtes orientées par la règle suivante :

$$\begin{cases} \{i\} \times \Delta' & \simeq & \Delta'^{\mathrm{op}}, & \text{si } i \text{ puits dans } \Delta, \\ & \simeq & \Delta', & \text{sinon ,} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta \times \{i'\} & \simeq & \Delta^{\mathrm{op}}, & \text{si } i' \text{ source dans } \Delta', \\ & \simeq & \Delta, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le graphe $\mathcal{Q}$ obtenu est encore biparti, on peut faire le choix $\varepsilon(i, i') = \varepsilon(i)\varepsilon(i')$, mais l'orientation n'est plus alternée.

Exemple 3.7. Le produit $A_2\square A_4$ est donné par



Théorème 3.8 ([Kel13]). *Soit $\mathcal{Q} = \Delta\square\Delta'$ comme ci-dessus. La ceinture bipartie de l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ est finie. Plus précisément,*

$$(\mu_+\mu_-)^{2(h+h')} = (\mu_-\mu_+)^{2(h+h')} = \mathrm{Id}$$

où h et h' sont les nombres de Coxeter des diagrammes de Dynkin Δ et Δ' respectivement.

Ce théorème implique la périodicité des Y-systèmes associés à la paire (Δ, Δ'), conjecturée par Zamolodchikov. Le phénomène de périodicité décrit dans le Théorème 3.8 est ainsi souvent appelé *périodicité de Zamolodchikov.*

3.4 Frises de Coxeter-Conway et algèbres amassées de type A

Dans [CC06], les frises de Coxeter-Conway sont reliées aux algèbres amassées de type A via la théorie des représentations de carquois. Les frises sont obtenues comme évaluations du carquois d'Auslander-Reiten. En prenant la caractéristique d'Euler des grassmanniennes des modules aux sommets du carquois on obtient des frises entières positives. En appliquant le "caractère d'amas" (connue aussi comme "formule de Caldero-Chapoton"), on obtient les valeurs de la frise comme variables d'amas de type A. La construction de [CC06] donne le résultat suivant.

Théorème 3.9. *Si les variables $x_1, \ldots, x_m$ sont des entrées d'une frise de Coxeter-Conway formant un zig-zag dans la frise, alors l'ensemble des entrées de la frise est l'ensemble des variables amassées de l'algèbre $\mathcal{A}(\mathrm{A}_m)$, chaque zig-zag formant un amas.*

Le résultat est indépendant du choix du zig-zag (correspondant en fait à un choix d'orientation du diagramme). Par un exemple, une diagonale correspond à l'orientation avec toutes les flèches dans le même sens, et un zig-zag alternant droite gauche à une orientation alternée.

Exemple 3.10. L'algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathrm{A}_2)$ associée au diagramme de type $\mathrm{A}_2 = 1 \to 2$ contient 5 variables d'amas, réparties en 5 amas, obtenus par la suite de mutations de graines suivante.

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ 1 \to 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1} \begin{pmatrix} \frac{1+x_2}{x_1}, x_2 \\ 1 \leftarrow 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2} \begin{pmatrix} \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \\ 1 \to 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1} \begin{pmatrix} \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \\ 1 \leftarrow 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2} \begin{pmatrix} \frac{1+x_1}{x_2}, x_1 \\ 1 \to 2 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien les variables de la frise de l'exemple 1.8.

Remarque 3.11. La périodicité des frises de Coxeter-Conway peut être vue comme conséquence du caractère fini des algèbres amassées de type A, mais aussi comme conséquence du Théorème 3.8 en prenant $\mathcal{Q} = \mathrm{A}_1\square\mathrm{A}_m$. En effet, considérons les graines suivantes (dans les illustrations on suppose m pair) :

$$\begin{array}{rcllcl}
\Sigma_0 & = & (x_1, x_2, \ldots, x_m, & \mathcal{Q} & = & \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\circ} \longleftarrow \overset{3}{\bullet} \quad \cdots \quad \longrightarrow \overset{m}{\circ}) \\
\mu_+\Sigma_0 & = & (x'_1, x_2, x'_3 \ldots, x_m, & \mathcal{Q}^{op} & = & \overset{1}{\bullet} \longleftarrow \overset{2}{\circ} \longrightarrow \overset{3}{\bullet} \quad \cdots \quad \longleftarrow \overset{m}{\circ}) \\
\mu_-\mu_+\Sigma_0 & = & (x'_1, x'_2, x'_3 \ldots, x'_m, & \mathcal{Q} & = & \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\circ} \longleftarrow \overset{3}{\bullet} \quad \cdots \quad \longrightarrow \overset{m}{\circ}).
\end{array}$$

Ces amas correspondent à des zig-zags (alternant gauche droite) consécutifs dans la frise :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & & \\
\cdots & & x_1 & & x'_1 & & \cdots & & \\
 & & & x_2 & & x'_2 & & & \\
 & & x_3 & & x'_3 & & & & \\
 & & & \ddots & & \ddots & & & \\
 & & \iddots & & \iddots & & & & \\
\cdots & & & x_m & & x'_m & & \cdots & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

La périodicité s'exprime par le fait que $\mu_-\mu_+$ soit d'ordre fini. Pour cet exemple le Théorème 3.8 propose une période qui n'est pas minimale, car on a ici $2(h+h') = 2(2+(m+1))$, et on sait que $m+3$ est une période.

3.5 2-Frises et algèbres amassées de type $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$

Dans [1], les 2-frises sont reliées aux algèbres amassées de type $\mathrm{A}_2\square\mathrm{A}_m$. On notera les sommets de $\mathrm{A}_2\square\mathrm{A}_m$ comme suit (dans le dessin ci-dessous on suppose m pair).

$$
\mathrm{A}_2\square\mathrm{A}_m \quad = \quad
\begin{tikzcd}
\overset{1}{\bullet} \arrow[r] & \overset{2}{\circ} \arrow[d] & \overset{3}{\bullet} \arrow[l] \arrow[r] & \cdots & \cdots \arrow[r] & \overset{m-1}{\bullet} \arrow[u] \arrow[r] & \overset{m}{\circ} \arrow[d] \\
\underset{m+1}{\circ} \arrow[u] & \underset{m+2}{\bullet} \arrow[l] \arrow[r] & \underset{m+3}{\circ} \arrow[u] & \cdots \arrow[l] & \cdots \arrow[r] & \underset{2m-1}{\circ} \arrow[u] & \underset{2m}{\bullet} \arrow[l]
\end{tikzcd}
\tag{I.9}
$$

Théorème 3.12 ([1]). *Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathrm{A}_2\square\mathrm{A}_m)$ l'algèbre amassée de graine initiale $\Sigma_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_{2m},\ \mathrm{A}_2\square\mathrm{A}_m)$. Soit F la 2-frise formelle dans laquelle les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ sont disposées en double-colonne.*

(i) Les entrées de F sont des variables d'amas de $\mathcal{A}$;

(ii) Les variables en double zig-zag forment des amas de $\mathcal{A}$;

(iii) Les amas de la ceinture bipartie de $\mathcal{A}$ sont donnés par les double-colonnes de F.

Remarque 3.13. Illustrons le point (iii) du Théorème 3.12

$$
\begin{array}{rcl}
\Sigma_0 & = & (\ x_1, x_2, x_3 \ldots, x_{2m-1}, x_{2m},\quad \mathcal{Q}\ ) \\
\mu_+\Sigma_0 & = & (\ x'_1, x_2, x'_3, \ldots, x'_{2m-1}, x_{2m},\quad \mathcal{Q}^{op}\ ) \\
\mu_-\mu_+\Sigma_0 & = & (\ x'_1, x'_2, x'_3 \ldots, x'_{2m-1}, x'_{2m},\quad \mathcal{Q}\ )
\end{array}
$$

Ces amas se localisent dans la 2-frise comme suit.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
 & & x_1 & x_{m+1} & x'_1 & x'_{m+1} & & \\
 & & x_{m+2} & x_2 & x'_{m+2} & x'_2 & & \\
 & & x_3 & x_{m+3} & x'_3 & x'_{m+3} & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots
\end{array}
$$

La périodicité s'exprime par le fait que $\mu_-\mu_+$ soit d'ordre fini. Pour cet exemple le Théorème 3.8 donne une période qui coïncide avec celle du Théorème 2.3, car on a ici $2(h+h') = 2(3+(m+1))$.

Remarque 3.14. Pour les petites valeurs de m, le graphe (I.9) est mutation-équivalent aux diagrammes de Dynkin suivants

$\mathrm{A}_2\square\mathrm{A}_1 \sim \mathrm{A}_2, \quad \mathrm{A}_2\square\mathrm{A}_2 \sim \mathrm{D}_4, \quad \mathrm{A}_2\square\mathrm{A}_3 \sim \mathrm{E}_6, \quad \mathrm{A}_2\square\mathrm{A}_4 \sim \mathrm{E}_8.$

(le cas $m = 2$ est donné en exemple 3.3). Les algèbres amassées correspondantes sont toutes de type fini. Mais les variables d'amas n'apparaissent pas toutes dans les 2-frises (sauf dans le cas $m = 1$, voir exemple 2.10) contrairement au cas des frises de Coxeter-Conway. Par exemple dans le cas $m = 2$, par périodicité la 2-frise formelle contient 12 entrées distinctes (voir aussi exemple 2.10) alors que l'algèbre amassée de type D_4 possède 16 variables d'amas. La périodicité des 2-frises s'interprète comme la périodicité de Zamolodchikov.

3.6 Autres types

Différentes versions de frises ont été définies et étudiées en variant la définition initiale des frises de Coxeter-Conway, selon un ou plusieurs critères. Les objets sont en eux-mêmes riches à étudier. Du point de vue algèbres amassées, les frises offrent un support combinatoire supplémentaire pour comprendre les variables d'amas ou les objets amas-basculants dans les catégorifications des algèbres.

- garder la configuration en changeant l'arithmétique
  - version additive : $a + d = b + c + 1$, [She76], [Mar12], [Lau14] ;
  - version addition de Nim : $a \boxplus d = b \boxplus c + 1$, [She76], [Lau14] ;
  - version tropicale : $a + d = \max(b + c, 0)$, [Pro05], [Guo13], [Gra13], [Pec14] ;
  - version quantique : $ad - q^{\frac{1}{2}}bc = 1$, [BD12] ;
  - version continue : $FF_{xy} - F_xF_y = 1$, [OT13] ;
- modifier la configuration
  - 2-frises [Pro05], [1], [2]
  - frises à partir de carquois [ARS10], [AD11], [ADSS12], [KS11], [Ess14] ;
- utiliser différents modèles de triangulations
  - triangulations marquées de disques pointés [BM09],
  - d-angulations de polygones [HJ14], [BHJ14],
- généraliser la règle unimodulaire et/ou modifier les conditions aux bords,
  - générales m-frises [1], [CR72],
  - SL_2-pavages, [ARS10], [BR10], [HJ13], [BHJ14], [4],
  - SL_k-frises, SL_k-pavages, [BR10], [3]

Mentionnons également que certains types de frises sont des cas particuliers de T-systèmes. Ces systèmes d'équations fonctionnelles ont été introduits dans l'étude de certains systèmes intégrables et sont reliés à la théorie des algèbres amassées, voir e.g. [KNS94], [DFK09], [IIK$^+$10].

Les frises définies à partir de carquois et les SL_k-frises offrent des cadres très larges d'étude, dans lesquels les frises de Coxeter-Conway sont des cas particuliers. Les frises définies à partir d'un carquois $\mathcal{Q}$ sont liées à l'algèbre amassée construite sur $\mathcal{Q}$, mais excepté le cas où $\mathcal{Q}$ est un diagramme de Dynkin de type A, les deux notions de frises ne coïncident pas. On présente

1. Ici nous avons un conflit de notation, le cas $m = 2$ de [CR72], ne correspond pas à la variante appelée 2-frises dans [1]

ci-dessous les frises définies à partir de carquois, pour souligner cette différence, les SL_k-frises font elles l'objet de §4.2.

À partir d'un carquois $\mathcal{Q}$ acyclique, on construit le carquois répété $\widetilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q} \times \mathbb{Z}$ ayant pour sommets les couples (i, n), $i \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathbb{Z}$ et les flèches définies par la règle

$$\begin{cases} (i,n) \longrightarrow (j,n), & \text{si } i \longrightarrow j \text{ dans } \mathcal{Q}, \\ (i,n) \longrightarrow (j,n+1), & \text{si } j \longrightarrow i \text{ dans } \mathcal{Q}, \end{cases}$$

Définition 3.15. Une frise de type $\mathcal{Q}$ est une application $f : \widetilde{\mathcal{Q}} \to \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est un anneau commutatif unitaire, telle que pour tous $i \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathbb{Z}$,

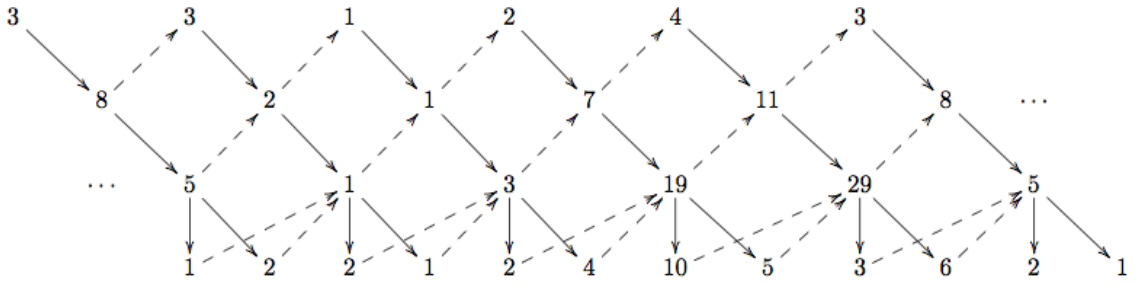
$$f(i,n+1)f(i,n) = 1 + \prod_{\substack{\text{flèches de } \mathcal{Q} \\ i \to j}} f(j,n+1) \prod_{\substack{\text{flèches de } \mathcal{Q} \\ i \leftarrow j}} f(j,n).$$

En utilisant les résultats de [CC06], on obtient le lien suivant.

Théorème 3.16. *Soit f une frise de type $\mathcal{Q}$ dans laquelle on note $x_i := f(i,1)$. Les entrées $f(i,n)$ sont les variables d'amas de l'algèbre amassée construite sur la graine initiale $\big((x_i)_{i \in \mathcal{Q}}, \mathcal{Q}\big)$.*

Remarque 3.17. Dans la définition ci-dessus, l'ensemble total des flèches apparaissant dans le membre de droite correspond à l'ensemble des flèches pointant sur le sommet $f(i, n+1)$.

Exemple 3.18. On représente les frises en attachant au sommet (i, n) sa valeur $f(i, n)$. La frise suivante est une (partie de) frise de type D_5 coïncidant avec les définitions de [ARS10] et [BM09].



Remarque 3.19. Les 2-frises de largeur 2 sont reliées à l'algèbre amassée de type D_4 mais ne coïncident pas avec les frises de type D_4 au sens ci-dessus.

3.7 Remarques sur les preuves

Le Théorème 3.12 fait entrer les 2-frises dans la théorie des algèbres amassées. Certains résultats sur les 2-frises, comme les Théorèmes 2.3, 2.4 et 2.9, peuvent alors se déduire de résultats plus forts venant de la théorie des algèbres amassées.

Soulignons que les Théorèmes 2.3, 2.4, et 2.5 sont établis dans [1] par des méthodes élémentaires indépendantes de cette théorie, reposant essentiellement sur le lien avec les équations linéaires en différences.

En revanche, le Théorème 2.13 utilise le théorème de classification des algèbres amassées de type fini et le phénomène de Laurent. On explique dans les grandes lignes le principe de la preuve donnée dans [2].

Dans le cas $m > 5$ le graphe $\mathcal{Q} = \mathrm{A}_2 \square \mathrm{A}_m$ n'est pas mutation-équivalent à un diagramme de Dynkin. L'algèbre amassée correspondante, de graine initiale $(x_1, \ldots, x_{2m})$, $\mathcal{Q}$, admet alors infinité d'amas. En choisissant un amas $u = (u_1, \ldots, u_{2m})$ dans cette algèbre les entrées de la 2-frise dans laquelle $(x_1, \ldots, x_{2m})$ est disposée en double-colonne, s'expriment comme polynômes de Laurent à coefficients positifs en $(u_1, \ldots, u_{2m})$. En spécifiant alors toutes les variables $u_i = 1$, on crée une 2-frise entière positive. Comme il y a une infinité de choix pour u, on montre qu'il y a une infinité de 2-frises entières positives.

Cependant, les 2-frises entières positives ne s'obtiennent pas toutes par ce procédé. Par exemple pour $m = 2$, on a $\mathrm{A}_2 \square \mathrm{A}_2 \sim \mathrm{D}_4$. L'algèbre amassée correspondante possède 50 amas. Hors on dénombre 51 2-frises de largeur 2. La frise (I.6) ne s'obtient pas par spécialisation des variables d'un amas à 1. Il ne s'agit pas d'un cas isolé. Pour $m = 3$, l'algèbre amassée correspondante (de type E_6) possède 833 amas, et 868 2-frises de largeur 3 ont déjà été dénombrées.

Cette remarque soulève une question importante autour des points entiers dans les variétés amassées et l'éventuelle existence de "faux amas" dans les algèbres amassées, voir §5.1.

4 Trialité : SL_{k+1}-frises, équations linéaires en différence, et espaces de modules de polygones

4.1 Premiers exemples

Commençons par illustrer la dualité entre équations linéaires en différences et frises. Considérons une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels, périodique de période n. Formons l'équation en récurrence d'ordre 2 suivante :

$$V_i = a_i V_{i-1} - V_{i-2}, \tag{I.10}$$

d'inconnues réelles V_i, $i \in \mathbb{Z}$.

On dit qu'une solution est n-antipériodique si $V_{i+n} = -V_i$ pour tout i.

Proposition 4.1 ([1]). *Les solutions de l'équation* (I.10) *sont toutes n-antipériodiques si et seulement si la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, définit la première rangée d'une frise de Coxeter-Conway de largeur $m = n - 3$.*

Ceci est dû au fait que les diagonales des frises de Coxeter-Conway satisfont ce type de relation de récurrence. Par exemple, la frise (I.1), est définie par la séquence $(a_1, a_2, \ldots, a_7) = (4, 2, 1, 3, 2, 2, 1)$. En notant $(V_0, V_1, \ldots, V_6) = (1, 4, 7, 3, 2, 1, 0)$ les éléments de la première diagonale (complétée d'un 0), et en prolongeant la suite V_i par antipériodicité, $V_{i+7} = -V_i$, on obtient une solution 7-antipériodique de (I.10).

Fixons maintenant deux suites $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ périodiques de période n. Considérons l'équation en récurrence d'ordre 3 suivante :

$$V_i = a_i V_{i-1} - b_i V_{i-2} + V_{i-3} \tag{I.11}$$

d'inconnues V_i, $i \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.2 ([1]). *Les solutions de l'équation* (I.11) *sont toutes n-périodiques si et seulement si la séquence $b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_n, a_n$, définit la première rangée d'une 2-frise de largeur $m = n - 4$.*

Ceci est également dû au fait que les diagonales des 2-frises satisfont ce type de relation de récurrence. Par exemple, la frise (I.4), est définie par la séquence

$$(b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_8, a_8) = (3, 7, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 10, 3, 1, 2, 3, 2).$$

En notant $(V_0, V_1, \ldots, V_7) = (1, 7, 10, 7, 1, 1, 0, 0)$ les éléments de la première diagonale (complétée de deux 0), et en prolongeant la suite V_i par périodicité en posant $V_{i+8} = V_i$, on obtient une solution 8-périodique de (I.11).

On illustre maintenant les dualités entre polygones et frises, et entre polygones et équations en différence. On considère les polygones dans le plan projectif réel, comme suites périodiques de points $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, avec la condition de généricité que trois sommets consécutifs ne soient pas sur une même droite projective. On abrège cette condition par $|v_i, v_{i+1}, v_{i+2}| \neq 0$. On s'intéresse à l'espace de tels polygones modulo transformations projectives. On note

$$\mathcal{C}_{3,n} = \left\{(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} : v_i \in \mathbb{RP}^2,\ v_{i+n} = v_i,\ |v_i, v_{i+1}, v_{i+2}| \neq 0\right\} / \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}).$$

Lorsque n n'est pas un multiple de 3, tout polygone $v \in \mathcal{C}_n$ se relève de manière unique (modulo action de SL_3) en une suite n-périodique $V = (V_i)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant $\det(V_i, V_{i-1}, V_{i-2}) = 1$. On peut alors exprimer chaque vecteur de V comme combinaison linéaire des trois vecteurs précédents :

$$V_i = a_i V_{i-1} - b_i V_{i-2} + c_i V_{i-3}.$$

L'invariance du déterminant entre trois vecteurs consécutifs implique $c_i = 1$ pour tout i. La suite V étant n-périodique les coefficients a_i et b_i définis par la relation ci-dessus sont également n-périodiques. Les composantes de ces vecteurs de fournissent ainsi 3 solutions périodiques indépendantes d'une équation de type (I.11).

En résumé, et en utilisant la Proposition 4.2, on a

Proposition 4.3 ([1]). *Lorsque $n \neq 0 \mod 3$, tout polygone $v \in \mathcal{C}_{3,n}$ correspond à une unique 2-frise de largeur $m = n - 4$, et vice versa.*

En partant d'une 2-frise, on peut obtenir V en prenant des triplets de diagonales, puis projeter pour obtenir v. Par exemple, en prenant la première, la troisième et la cinquième diagonale dans (I.4), complétées par des 0, on obtient la suite

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} V_0 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

pour laquelle $\det(V_i, V_{i-1}, V_{i-2}) = 1$ quel que soit i.

Les frises de Coxeter-Conway correspondent elles à des polygones sur la droite projective à nombre impair de sommets.

On présente dans la suite la trialité de manière plus générale. Les n-gones sont dans l'espace $\mathbb{P}^k$, les équations sont d'ordre $k+1$ et de (anti)période n et les frises se généralisent en SL_{k+1}-frises de largeur $m = n-k-2$.

4.2 L'espace $\mathcal{F}_{k+1,n}$

Les SL_{k+1}-frises sont des généralisations des frises de Coxeter-Conway (correspondant au cas $k=1$). De manière informelle une SL_{k+1}-frise est un arrangement de nombres dans le plan tel que tous blocs de taille $(k+1)\times(k+1)$ de valeurs adjacentes forme une matrice de déterminant 1, et satisfaisant des "conditions au bord".

Définition 4.4. Une SL_{k+1}-frise de largeur m est une application $d : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

— les "conditions au bord" :

$$\begin{cases} d_{i,i-1} = d_{i,i+m} = 1 & \text{pour tout } i, \\ d_{i,i-1-j} = d_{i,i+m+j} = 0 & \text{pour } 1 \le j \le k \end{cases}$$

— la "règle unimodulaire" :

$$D_{i,j} := \begin{vmatrix} d_{i,j} & d_{i,j+1} & \dots & d_{i,j+k} \\ d_{i+1,j} & d_{i+1,j+1} & \dots & d_{i+1,j+k} \\ \dots & \dots & & \dots \\ d_{i+k,j} & d_{i+k,j+1} & \dots & d_{i+k,j+k} \end{vmatrix} = 1, \tag{I.12}$$

pour tous $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

On représente une SL_{k+1}-frise de la manière suivante,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \\
\dots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & \dots & & d_{0,w-1} & & d_{1,w} & & d_{2,w+1} & & \dots & & \dots \\
 & & & \iddots & & \iddots & & \iddots & & & & \\
\dots & & d_{0,1} & & d_{1,2} & & d_{2,3} & & d_{3,4} & & d_{4,5} & \\
 & d_{0,0} & & d_{1,1} & & d_{2,2} & & d_{3,3} & & d_{4,4} & & \dots \\
\dots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \\
 & & & & \vdots & & & & \vdots & & &
\end{array} \tag{I.13}$$

Le système d'indiçage des entrées d'une SL_{k+1}-frise est sensiblement différent de celui des 2-frises, pour coller aux notations de [1] et [3]. Les frises seront souvent représentées tournées de 45° vers la droite, de sorte que les indices coïncident avec les coordonnées cartésiennes usuelles, ou encore avec les numérotations usuelles dans les matrices. La portion de frise ci-dessus contient k rangées de 0 en haut et en bas. Dans les illustrations on omettra souvent les rangées de 0.

Définition 4.5. Une SL_{k+1}-frise est dite *régulière* si tous les mineurs d'ordre $(k+2)$ sont nuls, i.e. pour tous $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\begin{vmatrix} d_{i,j} & d_{i,j+1} & \dots & d_{i,j+k+1} \\ d_{i+1,j} & d_{i+1,j+1} & \dots & d_{i+1,j+k} \\ \dots & \dots & & \dots \\ d_{i+k+1,j} & d_{i+k,j+1} & \dots & d_{i+k+1,j+k+1} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(I.14)}$$

Remarque 4.6. La régularité des frises est une certaine forme de généricité. Si on suppose que génériquement les mineurs d'ordre k dans une SL_{k+1}-frise sont non nuls, alors la règle de Dodgson implique que les mineurs d'ordre $(k+2)$ sont tous nuls. En §1 on avait supposé les frises de Coxeter-Conway régulières (car ne prenant pas la valeur 0), on donne ci-dessous un exemple de frises de Coxeter-Conway non régulière :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\ & 1 & & 0 & & 2 & & 0 & & 3 & \\ \cdots & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & \cdots \\ & 0 & & 4 & & 0 & & 5 & & 0 & \\ \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \end{array}$$

Une frise non-régulière n'est pas nécessairement périodique.

Théorème 4.7 ([3]). *Dans une SL_{k+1}-frise régulière de largeur m, les entrées $d_{i,j}$ satisfont pour tous (i,j)*

$$d_{i+n,j} = (-1)^k d_{i,j}, \quad d_{i,j+n} = (-1)^k d_{i,j},$$

où $n = m + k + 2$.

Autrement dit, selon la parité de k, les SL_{k+1}-frises sont périodiques ou antipériodiques. Les rangées sont toujours périodiques, car $d_{i+n,j+n} = d_{i,j}$. Les frises sont donc déterminées par un bloc de taille $n \times n$ qui se répète en alternant éventuellement les signes.

Notation 2. On note $\mathcal{F}_{k+1,n}$ l'ensemble des SL_{k+1}-frises de largeur $m = n - k - 2$.

Exemple 4.8. Les frises de Coxeter-Conway se prolongent en SL_2-frise par antipériodicité. Par exemple, la frise (I.1) se prolonge en

$$\begin{array}{c} \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \\ 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; \dots \\ \dots \;\; 4 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 1 \\ 3 \;\; 7 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 5 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 5 \;\; 3 \;\; 1 \;\; \dots \\ \dots \;\; 5 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 5 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 1 \;\; 2 \\ 3 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 1 \;\; \dots \\ \dots \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \dots \\ \dots \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \\ -3 \;\; -2 \;\; -2 \;\; -1 \;\; -4 \;\; -2 \;\; -1 \;\; -3 \;\; -2 \;\; -2 \;\; -1 \;\; -4 \;\; -2 \;\; -1 \;\; \dots \\ \dots \;\; -5 \;\; -3 \;\; -1 \;\; -3 \;\; -7 \;\; -1 \;\; -2 \;\; -5 \;\; -3 \;\; -1 \;\; -3 \;\; -7 \;\; -1 \;\; -2 \\ -3 \;\; -7 \;\; -1 \;\; -2 \;\; -5 \;\; -3 \;\; -1 \;\; -3 \;\; -7 \;\; -1 \;\; -2 \;\; -5 \;\; -3 \;\; -1 \;\; \dots \\ \dots \;\; -4 \;\; -2 \;\; -1 \;\; -3 \;\; -2 \;\; -2 \;\; -1 \;\; -4 \;\; -2 \;\; -1 \;\; -3 \;\; -2 \;\; -2 \;\; -1 \\ -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \\ \dots \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \dots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}$$

Exemple 4.9. Les 2-frises peuvent être vues comme deux SL_3-frises imbriquées. Plus précisément, si $(v_{i,j})$ une 2-frise de largeur m indexée par $I := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \cup (\frac{1}{2}+\mathbb{Z})^2 \ : \ 0 \leq i-j \leq m-1\}$, on pose pour tout couple (i,j) entiers dans I

$$d_{i,j} = v_{i,j} \quad \text{et} \quad d'_{i,j} = v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},$$

et on prolonge en dehors de I par $d_{i,i-1-j} = 0$ pour $1 \leq j \leq k$, puis $d_{i+n,j} = d_{i,j+n} = d_{i,j}$ et de même $d'_{i,i-1-j} = 0$ pour $1 \leq j \leq k$, puis $d'_{i+n,j} = d'_{i,j+n} = d'_{i,j}$.

Proposition 4.10 ([1])**.** *Les entrées* $(d_{i,j})$ *et* $(d'_{i,j})$ *définies ci-dessus forment deux* SL_3*-frises.*

Il a été montré dans [BR10] que les mineurs $k \times k$ d'une SL_{k+1}-frise forment une SL_{k+1}-frise. La réciproque de la proposition ci-dessus est un cas particulier de cette dualité.

Proposition 4.11 ([BR10])**.** *A partir d'une* SL_3*-frise* $(d_{i,j})$*, en posant*

$$v_{i,j} := d_{i,j}, \quad v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} := d_{i,j}d_{i+1,j+1} - d_{i+1,j}d_{i,j+1}$$

on obtient une 2*-frise.*

Par exemple la 2-frise (I.4) produit les deux SL_3-frises suivantes

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\
\cdots & & 7 & & 2 & & 2 & & 2 & & 5 & & 3 & & 2 & & 2 & \\
 & 11 & & 10 & & 2 & & 2 & & 8 & & 5 & & 5 & & 1 & & \cdots \\
\cdots & & 15 & & 7 & & 1 & & 7 & & 5 & & 6 & & 2 & & 2 & \\
 & 2 & & 10 & & 1 & & 3 & & 3 & & 4 & & 2 & & 2 & & \cdots \\
\cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array} \tag{I.15}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & 3 & & 4 & & 2 & & 2 & & 2 & & 10 & & 1 & & 3 & & \cdots \\
\cdots & & 5 & & 6 & & 2 & & 2 & & 15 & & 7 & & 1 & & 7 & \\
 & 8 & & 5 & & 5 & & 1 & & 11 & & 10 & & 2 & & 2 & & \cdots \\
\cdots & & 5 & & 3 & & 2 & & 2 & & 7 & & 2 & & 2 & & 2 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots
\end{array} \tag{I.16}$$

4.3 L'espace $\mathcal{E}_{k+1,n}$

On considère les équations linéaires en différence d'ordre $k+1$, écrites sous la forme

$$V_i = a_i^1 V_{i-1} - a_i^2 V_{i-2} + \cdots - (-1)^k a_i^k V_{i-k} + (-1)^k V_{i-k-1}, \tag{I.17}$$

où $a_i^j \in \mathbb{R}$, avec $i \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq j \leq k$, sont des coefficients [2] réels et V_i les inconnues.

L'ensemble des solutions est de dimension $k+1$. Ici, les solutions (V_i) seront considérées soit comme des suites de nombres réels, $V_i \in \mathbb{R}$, soit comme des suites de vecteurs, $V_i \in \mathbb{R}^{k+1}$.

On dit qu'une solution (V_i) est *n-(anti)périodique* si pour tout i on a

$$V_{i+n} = (-1)^k V_i. \tag{I.18}$$

2. L'exposant j dans les coefficients est un indice et non une puissance.

Définition 4.12. Une équation (I.17) est appelée *n-superpériodique* si ses coefficients sont n-périodiques :

$$a^j_{i+n} = a^j_i$$

pour tout i, j, et si toutes ses solutions sont n-(anti)périodiques.

Notation 3. On note $\mathcal{E}_{k+1,n}$ l'ensemble des équations linéaires en différence d'ordre $k+1$ qui sont n-superpériodiques.

4.4 L'espace $\mathcal{C}_{k+1,n}$

On considère un n-gone de $\mathbb{RP}^k$ comme une application

$$v : \mathbb{Z} \to \mathbb{RP}^k$$

telle que $v_{i+n} = v_i$, pour tout i. On dit qu'un n-gone est *non-dégénéré* si tous $k+1$ sommets consécutifs n'appartiennent pas à un même hyperplan.

Notation 4. On note $\mathcal{C}_{k+1,n}$ l'ensemble des n-gones non-dégénérés de $\mathbb{RP}^k$, modulo transformations projectives de PGL_{k+1}.

La correspondance de Gelfand-MacPherson [GM82], identifie l'espace $\mathcal{C}_{k+1,n}$ avec le quotient de la Grassmannienne générique $\mathrm{Gr}_{k+1,n}$ par le tore $\mathbb{T}^{n-1} = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^{n-1}$:

$$\mathcal{C}_{k+1,n} \simeq \mathrm{Gr}_{k+1,n}/\mathbb{T}^{n-1}. \tag{I.19}$$

En effet, considérons l'ensemble des matrices de taille $(k+1) \times n$ telles que tous les $k+1$ mineurs d'ordre $k+1$ entre colonnes adjacentes (prises cycliquement) soient non nuls. Notons $\mathrm{Mat}^g_{k+1,n}$ cet ensemble. Les éléments de $\mathrm{Gr}_{k+1,n}$ s'identifient avec les éléments de $\mathrm{Mat}^g_{k+1,n}$ modulo action à gauche de GL_{k+1}. Fixons maintenant $v \in \mathcal{C}_{k+1,n}$, représenté par $(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{RP}^k)^n$ et relevons arbitrairement dans $\mathbb{R}^{k+1}$ en $V = (V_1, \dots, V_n)$. On voit V comme un élément de $\mathrm{Mat}^g_{k+1,n}$. Un autre représentant de v s'obtient comme $(Mv_1, \dots, Mv_n)$ avec $M \in \mathrm{PGL}_{k+1}$ et se relève en V' dans $\mathbb{R}^{k+1}$ avec $V' = (\widetilde{M}\lambda_1 V_1, \dots, \widetilde{M}\lambda_n V_n)$, où $\widetilde{M} \in \mathrm{GL}_{k+1}$ et λ_i constantes non nulles. En posant $\lambda = (\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n)^{\frac{1}{n}}$ et en formant la matrice diagonale $D \in \mathrm{SL}_n$ définie par $D_{i,i} = \lambda_i/\lambda$ on peut écrire

$$V' = \lambda \widetilde{M}\, V\, D$$

Ainsi V et V' définissent le même élément de $\mathrm{GL}_{k+1} \backslash \mathrm{Mat}^g_{k+1,n}/\mathbb{T}^{n-1} \simeq \mathrm{Gr}_{k+1,n}/\mathbb{T}^{n-1}$.

Remarque 4.13. L'espace $\mathcal{C}_{k+1,n}$ est un objet d'étude classique, voir e.g., [Gal56, GM82, Kap93, EP00]. Notre intérêt dans cet espace vient initialement de l'application pentagramme (voir §5.4), système dynamique intégrable agissant sur $\mathcal{C}_{3,n}$, voir [Sch92, OST10, Sol13, OST13]. Plusieurs généralisations de l'application pentagramme en dimension supérieure agissant sur $\mathcal{C}_{k,n}$, $k \geq 4$, ont été récemment introduites et étudiées ; voir [KS13b, KS13a, MB13a, MB13b, GSTV12, GSVT14].

4.5 Correspondance entre les espaces

Les trois espaces définis précédemment sont en fait des réalisations, combinatoire, analytique et géométrique d'un même espace.

Théorème 4.14 ([3]). *Soit $1 \leq k < n$ deux entiers.*

(i) Les espaces $\mathcal{E}_{k+1,n}$ et $\mathcal{F}_{k+1,n}$ sont des variétés algébriques isomorphes.

(ii) Si $k+1$ et n sont premiers entre eux, alors les espaces $\mathcal{E}_{k+1,n}$ et $\mathcal{F}_{k+1,n}$ sont également isomorphes à $\mathcal{C}_{k+1,n}$.

On ne présente pas de preuve précise ici. On décrit simplement comment passer d'un espace à l'autre.

D'une frise à une équation. On présente l'application $E : \mathcal{F}_{k+1,n} \to \mathcal{E}_{k+1,n}$. Soit $F = (d_{i,j})$ un élément de $\mathcal{F}_{k+1,n}$. Les diagonales satisfont des relations de récurrrence de type (I.17). Plus précisément, $V_i := d_{1,i}$ est solution de l'equation (I.17), dans laquelle les coefficients a_i^j sont donnés comme mineurs dans F de taille $j \times j$ avec $d_{i,i}$ en position en bas à droite :

$$a_i^j(F) = \begin{vmatrix} d_{i-j+1,i-j+1} & d_{i-j+1,i-j+2} & \cdots & \cdots & d_{i-j+1,i} \\ 1 & d_{i-j+2,i-j+2} & \cdots & \cdots & d_{i-j+2,i} \\ & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & d_{i,i} \end{vmatrix}. \tag{I.20}$$

Les diagonales $(d_{j,\bullet})$ satisfont toutes la même relation (ceci provient de la régularité de la frise). Autrement dit, en posant $V_i^{(j)} = d_{j,i}$, $1 \leq j \leq k+1$ on obtient $k+1$ solutions indépendantes de (I.17). Ces solutions étant toutes (anti)-périodiques, on en déduit que l'équation (I.17) avec coefficients (I.20) appartient à $\mathcal{E}_{k+1,n}$, on notera $E(F)$ cette équation.

D'une équation à une frise. On présente une application $F : \mathcal{E}_{k+1,n} \to \mathcal{F}_{k+1,n}$. Soit E une équation de type (I.17) appartenant à $\mathcal{E}_{k+1,n}$. On construit une frise à partir de solutions de E, en prenant pour i-ème diagonale $(d_{i,\bullet})$ la solution ayant pour conditions initiales :

$$d_{i,i-1} = 1, \quad d_{i,i-1-\ell} = 0, \ \ \forall\, 1 \leq \ell \leq k.$$

Les termes suivants se déduisent en appliquant la relation de récurrence. Ainsi, on calcule par exemple

$$\begin{aligned} d_{i,i} &= a_i^1, \\ d_{i,i+1} &= a_i^1 a_{i+1}^1 - a_{i+1}^2, \\ d_{i,i+2} &= a_i^1 a_{i+1}^1 a_{i+2}^1 - a_{i+1}^2 a_{i+2}^1 - a_i^1 a_{i+2}^2 + a_{i+2}^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

On notera $F(E)$ la frise ainsi obtenue.

D'un polygone à une frise et vice versa. On présente les applications $F : \mathcal{C}_{k+1,n} \to \mathcal{F}_{k+1,n}$, et $v : \mathcal{F}_{k+1,n} \to \mathcal{C}_{k+1,n}$. On se donne $v = (v_i)$ représentant un élément de $\mathcal{C}_{k+1,n}$. On

utilise l'identification (I.19). Tout d'abord, on le relève en $V = (V_1, \dots, V_n) \in \mathrm{Mat}^g_{k+1,n}$. Par action de GL_{k+1} on suppose V de la forme

$$V = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,k+2} & \cdots & d_{1,n} \\ 1 & d_{2,2} & & \cdots & \cdots & d_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_{k+1,k+1} & \cdots & d_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{I.21}$$

De plus, si $k+1$ et n sont premiers entre eux, alors par action de $\mathbb{T}^{n-1}$ à droite on peut normaliser pour avoir également

$$\det(V_i, V_{i+1}, \dots V_{i+k}) = 1,$$

pour tout i et en considérant les indices cycliquement modulo n. La matrice (I.21) se prolonge de manière unique en une frise de $\mathcal{F}_{k+1,n}$, que l'on note $F(v)$.

Réciproquement, partant d'une frise $F = (d_{i,j})$ on peut extraire de F le bloc V donné par (I.21). Ceci définit, par projection de $\mathbb{R}^{k+1}$ sur $\mathbb{RP}^k$, un élément de $\mathcal{C}_{k+1,n}$, noté $v(F)$.

4.6 Transformée(s) de Gale

La transformée de Gale est un avatar de l'isomorphisme $\mathrm{Gr}_{k+1,n} \simeq \mathrm{Gr}_{n-k-1,n}$. Dans la suite on notera $m = n-k-2$. La transformée de Gale présentée ici se décline de trois manières, et fournit des isomorphismes

$$\mathcal{C}_{k+1,n} \simeq \mathcal{C}_{m+1,n}, \qquad \mathcal{F}_{k+1,n} \simeq \mathcal{F}_{m+1,n}, \qquad \mathcal{E}_{k+1,n} \simeq \mathcal{E}_{m+1,n}.$$

qui commutent avec les applications E, F, v décrites au paragraphe précedent.

Définition-Théorème 4.15 ([Gal56], voir aussi [Cob22, EP00])**.** Soit A une matrice de taille $(k+1) \times n$ représentant un élément v de $\mathcal{C}_{k+1,n}$, et A' une matrice de taille $(m+1) \times n$ représentant un élément v' de $\mathcal{C}_{m+1,n}$. On dit que v et v' sont Gale-duaux s'il existe une matrice diagonale D de taille $n \times n$ telle que

$$ADA'^T = 0,$$

où A'^T est la matrice transposée. Étant donné v, il existe un unique élément v' Gale-dual de v. On note $v' = v^{\mathcal{G}}$.

Théorème 4.16 ([3])**.** *Soit $F = (d_{i,j})$ un élément de $\mathcal{F}_{k+1,n}$. On considère les coefficients a_i^j, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$, donnés par la formule (I.20), que l'on dispose dans une frise $F^{\mathcal{G}} = (d'_{i,j})$ de sorte que $d'_{i,j} = a_{i-1}^{k-(j-i)}$:*

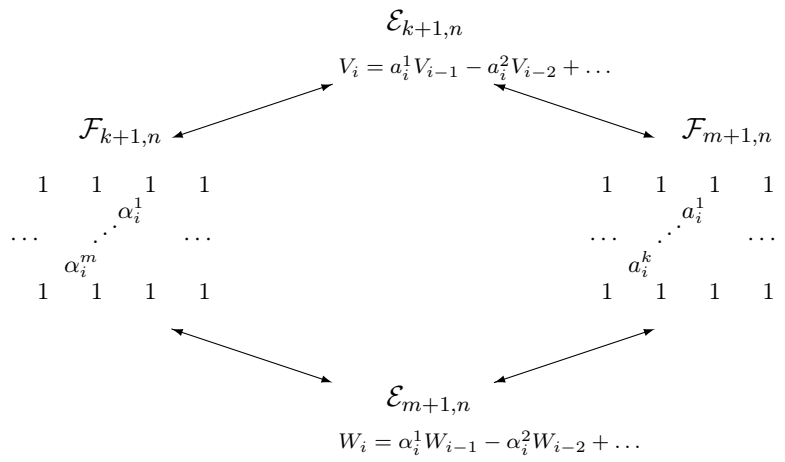
$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & & \dots & & a_n^1 & & a_1^1 & & a_2^1 & & \dots & & a_n^1 & \\ & & & a_n^2 & & a_1^2 & & a_2^2 & & & & a_n^2 & & \\ \dots & & \iddots & & \iddots & & \iddots & & & & \iddots & & \dots & \\ & a_n^k & & a_1^k & & a_2^k & & \dots & & a_n^k & & \dots & & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots & \end{array} \tag{I.22}$$

La frise $F^{\mathcal{G}}$ obtenue est un élément de $\mathcal{F}_{m+1,n}$. En appliquant, la même construction à $F^{\mathcal{G}}$ on obtient $(F^{\mathcal{G}})^{\mathcal{G}} = F$.

Définition 4.17. La frise $F^{\mathcal{G}}$ est appelée frise *Gale-duale* de F ou *transformée de Gale* de F.

Corollaire 4.18. *Si a_i^j, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$, sont les les coefficients d'une équation (I.17) n-superpériodique, alors disposés comme en (I.22) ils forment une SL_{m+1}-frise, où $m = n - k - 2$.*

À partir d'une équation n-superpériodique d'ordre $k+1$, on peut donc former deux frises, soit la SL_{k+1}-frise de largeur m donnée par les solutions, soit la SL_{m+1}-frise de largeur k donnée par les coefficients.

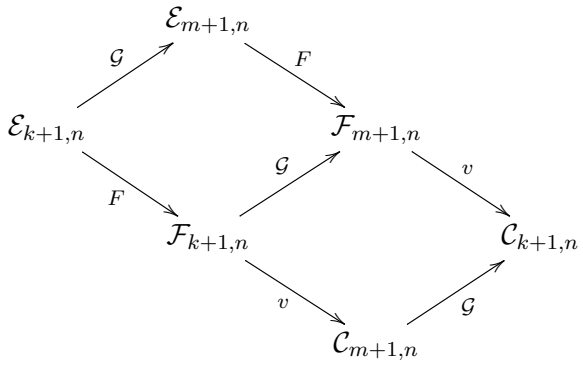


Corollaire 4.19. *Soit E une équation $\mathcal{E}_{k+1,n}$. Notons α_i^j les coefficients d_{ij} de la frise des solutions $F(E)$. L'equation en différence d'ordre $m+1$ donnée par*

$$W_i = \alpha_i^1 W_{i-1} - \alpha_i^2 W_{i-2} + \ldots - (-1)^m W_{i-m} + (-1)^m W_{i-m-1}$$

est n-(anti)périodique. On l'appelle équation Gale-duale de E et on la note $E^{\mathcal{G}}$.

Théorème 4.20 ([3])**.** *Lorsque $k+1$ et n ne sont pas premiers entre eux, le diagramme suivant commute*



Exemple 4.21. La dualité de Gale transforme une frise de Coxeter-Conway de largeur $m = n - 3$ en une SL_{m+1}-frise de largeur 1, donnée par la première rangée $a_1, \ldots, a_n$. Ceci est équivalent au fait que les entrées $e_{i,i+n-3}$ données par la formule (I.2) sont égales à 1.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
\frac{1+x_1}{x_2} & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} & & x_1 & & \frac{1+x_2}{x_1} \\
& x_1 & & \frac{1+x_2}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & x_2 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
& x_1 & & \frac{1+x_2}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & x_2 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

FIGURE I.1 – Dualité de Gale entre SL_2-frises de largeur 2 et SL_3-frises de largeur 1.

Exemple 4.22. Si l'équation d'ordre 3 : $V_i = a_iV_{i-1} - b_iV_{i-2} + V_{i-3}$ est 5-superpériodique, alors l'équation d'ordre 2 obtenue en "oubliant" les coefficients b_i, $W_i = a_iW_{i-1} - W_{i-2}$ est également 5-superpériodique. Ces deux equations sont alors Gale-duales l'une de l'autre.

Exemple 4.23. Par exemple, les figures I.1 et I.2, illustrent la dualité de Gale sur les frises. En notant A, resp. A', la matrice définie par l'encadrement dans la frise de gauche, resp. frise de droite, on vérifie que

$$ADA'^T = 0, \qquad \text{avec} \qquad D = \mathrm{diag}(1, -1, 1, -1, \ldots).$$

La frise Gale duale se construit en calculant des mineurs dans la frise de départ par (I.20). Par exemple dans la Figure I.2, la première rangée de la frise de droite coincide avec la dernière rangée de la frise de gauche (i.e. mineurs 1×1), la deuxième rangée de la frise de droite s'obtient en calculant les mineurs 2×2 basés sur les deux dernières rangées non triviales de la frise de gauche :

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 11 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 7 & 19 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \ldots$$

La même procédure s'applique pour aller de la frise de droite à la frise de gauche..

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
3 & & 5 & & 2 & & 5 & & 2 & & 5 & & 4 & & 3 \\
& 14 & & 3 & & 7 & & 8 & & 2 & & 19 & & 1 & & 14 \\
2 & & 8 & & 1 & & 11 & & 1 & & 7 & & 3 & & 2 \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
& & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
1 & & 11 & & 1 & & 7 & & 3 & & 2 & & 8 & & 1 \\
& 4 & & 3 & & 5 & & 2 & & 5 & & 2 & & 5 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & &
\end{array}
$$

FIGURE I.2 – Dualité de Gale entre une SL_3-frise de largeur 3 et une SL_4-frise de largeur 2.

5 Perspectives

5.1 Points entiers dans les espaces de frises et dans les variétés amassées

L'étude des points entiers dans les variétés amassées est un sujet assez peu étudié. Les premiers exemples donnés par les frises mettent en valeur un phènomène intéressant avec l'existence de points entiers non-triviaux (i.e. non obtenus par évaluation d'un amas à 1, voir frise (I.6) et discussion §3.7), et la possible existence de "faux-amas" dans les algèbres amassées. Le cas des frises de Coxeter-Conway est parfaitement compris grâce à la correspondance avec les triangulations de polygones. Les triangulations marquées de disques pointés permettent également de construire des frises entières de type D, [BM09], mais là aussi un phénomène de frise exceptionnelle apparait (voir Appendice de *loc. cit.*).

Pb I.1. Donner un modèle combinatoire (triangulations généralisées ?) pour l'étude des 2-frises (et/ou SL_k-frises) entières positives.

Pb I.2. Déterminer les points entiers dans les espaces de frises/variétés amassées .

5.2 Opérateurs en différence commutants

Les équations en différences peuvent s'étudier sous une formulation "opérateurs en différences". Si on note T l'opérateur de décalage sur l'espace des suites indexées par $\mathbb{Z}$, défini par

$$T\,(V_i)_i = (V_{i-1})_i,$$

les solutions d'une équation de type (I.17) s'interprétent comme des vecteurs propres associés à la valeur $(-1)^k$ de l'opérateur

$$L := T^{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j}\, a^j\, T^j \tag{I.23}$$

où les coefficients sont donnés par des suites $(a_i^j)_i$. Les équations n-superpériodiques correspondent à des opérateurs n-superpériodiques pour lesquels les vecteurs propres appartiennent au noyau de l'opérateur

$$T^n - (-1)^k \mathrm{Id}.$$

Le problème des opérateurs commutants est un problème classique de géométrie différentielle, [BC22]. Récemment, I. Krichever a utilisé la transformée de Gale définie sur les SL_k-frises dans [3] pour construire des opérateurs commutants.

Théorème 5.1 ([Kri14]). *Soit $k+1$ et n deux entiers premiers entre eux. Pour tout opérateur d'ordre $k+1$, n-superpériodique L de type (I.23), il existe un opérateur L^σ, d'ordre $n-k-1$, dont les coefficients s'obtiennent à partir de l'équation Gale-duale associée, tel que L et L^σ commutent et tel que de plus*

$$T^n - (-1)^k \mathrm{Id} = (L - (-1)^k \mathrm{Id})(L^\sigma + \mathrm{Id}) = (L^\sigma + \mathrm{Id})(L - (-1)^k \mathrm{Id}).$$

On renvoit à [Kri14] pour la construction précise de L^σ.

Pb I.3. Étendre le Théorème 5.1 au cas k et n arbitraires.

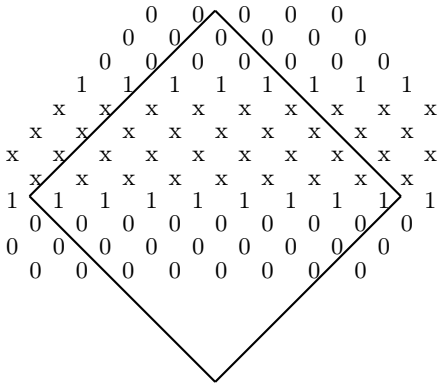
La contrainte $k+1$ et n premiers entre eux est un obstacle classique dans les théories de Burchnall-Chaundy-Krichever. Cependant, dans le cadre combinatoire la transformée de Gale semble éviter cet obstacle.

Pb I.4. Étudier les opérateurs en différences associés à d'autres types de frises.

Par exemple, les frises de type D étudiées dans [Ess14] s'obtiennent comme cas particuliers de frises de type A et donneront des opérateurs linéaires (I.23) avec symétries supplémentaires. Dans le cas des opérateurs différentiels on peut s'appuyer sur les résultats de [DS84].

5.3 Frises, matrices unipotentes et Grassmanniennes

Notons par N, resp. B^-, les matrices unitriangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures, dans SL_n. Pour un bon choix de matrice de permutation w, la double cellule de Bruhat réduite $N^w := N \cap B^- w B^-$ s'identifie comme un ouvert dense de la Grassmannienne $\mathrm{Gr}_{k+1,n}$. On peut associer à une SL_{k+1}-frise F de largeur $m = n-k-2$ un élément de N, en "découpant" un morceau de frise, par exemple comme illustré ci-dessous.



$$\mapsto \quad M_F = \begin{pmatrix} 1 & d_{1,1} & \cdots & d_{1,m} & 1 & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & & d_{n-m,n-1} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & d_{n-1,n-1} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M_F obtenue appartient plus précisément à N^w. Une telle matrice M_F se plonge dans une unique frise F.

La transformée de Gale se décrit sur les matrices à l'aide de l'anti-involution "iota" introduite dans [BFZ96] et définie sur les matrices par

$$M^\iota = DM^{-1}D$$

où D est la matrice diagonale telle que $D_{i,i} = (-1)^{i+1}$. Cette anti-involution se restreint de N^w à $N^{w^{-1}}$.

Théorème 5.2 ([3]). *Soit F une SL_{k+1}-frise de largeur $m = n-k-2$. La matrice ${}^tM_F^\iota$ se prolonge en la frise Gale duale $F^{\mathcal{G}}$.*

Ainsi, il est naturel de faire passer de l'information des frises vers N^w ou *vice versa*.

Pb I.5. Définir l'application pentagramme dans N^w.

Pb I.6. Interpréter l'application "twist" $\zeta : N^w \to N^w$ définie [BFZ96] et les coordonnées de Plücker tordues de [MS13] en termes de frises et transformée de Gale.

5.4 Application pentagramme

L'application pentagramme est un système dynamique discret introduit en 1992 par Richard Schwartz, [Sch92]. Les preuves récentes de l'intégrablité de cette application, [OST10], et les connections avec la théorie des algèbres amassées, [Gli11], ont déclenché une nouvelle activité de recherche sur le sujet, s'inscrivant à la fois dans la théorie classique des systèmes intégrables, et dans la théorie récente de dynamique amassée, e.g. [GSTV12], [GSVT14], [FM14], [GK13], [KV14], [KS13b], [KS13a], [MB13a], [MB13b], [OST13], [Sch13], [Sol13].

L'application pentagramme T opère sur les polygones du plan projectif. Plus précisément T agit sur l'espace $\mathcal{C}_{3,n}$ et sur l'espace plus grand $\mathcal{P}_{3,n}$, dit espace des polygones *tordus* (pour lesquels les sommets sont périodiques à monodromie près). On a

$$\mathcal{C}_{3,n} \subset \mathcal{P}_{3,n} := \{(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \exists M \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}),\ v_{i+n} = Mv_i,\ |v_i, v_{i+1}, v_{i+2}| \neq 0\} / \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}).$$

Etant donné un n-gone P, son image $T(P)$ par l'application pentagramme est obtenue comme points d'intersection entre diagonales courtes consécutives (joignant les i-ème et $(i+2)$-ème sommets), voir illustration en Figure I.3.

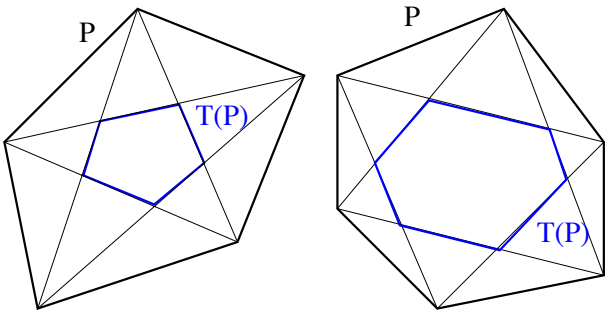


FIGURE I.3 – L'application pentagramme.

Théorème 5.3 ([OST10], [OST13], [Sol13]). *L'application pentagramme est un système complètement intégrable.*

L'intégrabilité avait été conjecturée par Schwartz dans les années 90. La première preuve donnée dans [OST10] concerne le cas de T agissant sur $\mathcal{P}_{3,n}$. Le cas de T agissant sur $\mathcal{C}_{3,n}$ a été compris plus tard, indépendamment dans [OST13] et [Sol13].

Un autre résultat récent important relie l'application pentagramme à la théorie des algèbres amassées. Ce possible lien avait été evoqué dans [OST10], puis développé dans [Gli11].

Théorème 5.4 ([Gli11]). *L'application pentagramme agissant sur $\mathcal{P}_{3,n}$ suit une dynamique amassée.*

Plus précisément, en utilisant un bon choix de coordonnées sur $\mathcal{P}_{3,n}$, Max Glick [Gli11] a fourni des formules explicites pour T et ses itérées T^k, $k \in \mathbb{N}$. Les coordonnées de $T(P)$ s'obtiennent à partir de celles de P en faisant une suite de mutations d'amas de type "Y-motif" (voir [FZ07]), régis par un carquois biparti.

L'espace $\mathcal{P}_{3,n}$ est topologiquement trivial : il est isomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$. Contrairement à l'espace $\mathcal{C}_{3,n}$ qui est une sous-variété de codimension 8 (les éléments de $\mathcal{C}_{3,n}$ se caractérisent comme

les éléments de $\mathcal{P}_{3,n}$ pour lesquels $M = \mathrm{Id}$) topologiquement plus compliquée. L'étude des 2-frises dans [1] a été initiée pour mieux comprendre l'espace $\mathcal{C}_{3,n}$.

D'un point de vue frises, les éléments de $\mathcal{P}_{3,n}$ correspondent à des 2-frises infinies (définies à partir de suites arbitraires $(b_i, a_i)_{1\leq i\leq n}$) et les éléments de $\mathcal{C}_{3,n}$ à des 2-frises de largeur $n-4$, voir Proposition 4.3. Le Théorème 3.12 munit l'espace $\mathcal{C}_{3,n}$ d'une structure de variété amassée. Les doubles zig-zags dans les 2-frises fournissent des systèmes de $2n-8$ coordonnées sur $\mathcal{C}_{3,n}$, dont les applications de transition sont données par des mutations d'amas.

Le projet de recherche ci-dessous propose une étude de l'application pentagramme via les frises et la théorie des algèbres amassées.

Pb I.7. Obtenir l'analogue du Théorème 5.4 pour T agissant sur $\mathcal{C}_{3,n}$.

Pb I.8. Obtenir les formules explicites pour T et T^k en coordonnées d'amas sur $\mathcal{C}_{3,n}$.

Pb I.9. Donner une description combinatoire pour T agissant sur les 2-frises.

Pb I.10. Définir des formes (pré)symplectiques T-invariantes sur $\mathcal{C}_{3,n}$ via la structure de variété amassée.

Pb I.11. Etudier les généralisations de T agissant sur $\mathcal{C}_{k,n}$ via la combinatoire des SL_k-frises.

Remarque 5.5. La question PI.8 a été traitée dans le cas $n = 7$. Les formules obtenues sont toutes rationnelles sans signe moins, ce qui renforce l'idée que les coordonnées d'amas sont des bonnes coordonnées pour étudier T agissant sur $\mathcal{C}_{3,n}$.

Remarque 5.6. Les variétés amassées sont munies naturellement d'une forme (pré-)symplectique, dont l'expression s'obtient facilement à partir des carquois sous-jacents. Pour l'espace $\mathcal{C}_{3,n}$ la forme a été étudiée dans [1]. L'application T ne préserve pas cette forme. Ceci laisse penser que d'autres formes naturelles pourraient être définies sur les variétés amassées. Le point de départ pour cette étude est la question PI.10 ci-dessus.

Partie II

Algèbres non-associatives

Dans les sous-parties II.1 et II.2, on s'intéresse à des algèbres graduées pour lesquelles le défaut de commutativité et/ou d'associativité est controlé par la graduation. Il est remarquable qu'un grand nombre d'algèbres classiques admettent de telles graduations. C'est ainsi le cas pour les algèbres de matrices, les quaternions, les octonions.... On s'intéresse plus particulièrement à une série d'algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$, généralisant les octonions.

La partie II.3 est indépendante des deux autres. Dans cette sous-partie on étudie une classe particulière de super-algèbres de Jordan.

Les algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$ généralisent l'algèbre des octonions de la même façon que les algèbres de Clifford généralisent l'algèbre des quaternions. On peut illustrer la situation par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\begin{array}{c}\text{Alg. Clifford}\\ C\ell_{p,q}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\text{Séries}\\ \mathbb{O}_{p,q}\end{array}} & \\
\mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & \mathbb{H} \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{O} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{\text{Alg. Cayley Dickson}}
\end{tikzcd}$$

Les algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$ sont de dimension réelle 2^n, où $n = p + q$, et (p, q) représente la signature des générateurs. Les algèbres $\mathbb{O}_{0,n}$ sont associées à la suite de nombres :

$$\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, 9, 10, 12, 16, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 28, 32, 33, 34, 36, 40, 41, 42, 44, 48, \ldots,$$

identifiée par l'encyclopedie de Sloane comme la *fonction de Hurwitz-Radon* évaluée sur les puissances de 2. Les valeurs $1, 2, 4, 8$ correspondent aux algèbres à division $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ pour lesquelles la norme euclidienne est multiplicative :

$$\|a\| \, \|b\| = \|ab\|; \tag{II.1}$$

les nombres suivants dans la suite ci-dessus donne la dimension de sous-espaces maximaux de $\mathbb{O}_{0,n}$ pour lesquels la propriété (II.1) est satisfaite. Les algèbres $\mathbb{O}_{0,n}$ génèrent des identités de sommes de carrés de la théorie connue sous le nom de composition de formes quadratiques.

On commence cette partie en présentant la structure et les propriétés des algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$. Les applications à la théorie de Hurwitz-Radon et à la combinatoire binaire sont données en II.2.

1 Algèbres graduée-commutatives graduée-associatives

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur un corps $\mathbb{K}$. Une graduation de $\mathcal{A}$ par un groupe abélien G est une décomposition de $\mathcal{A}$ en somme directe de sous espaces indicées par G,

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{x \in G} \mathcal{A}_x,$$

tels que pour tous $x, y \in G$,

$$\mathcal{A}_x \mathcal{A}_y \subset \mathcal{A}_{x+y}.$$

Pour un élément $a \in \mathcal{A}_x$, on dit que a est homogène de degré x, et on note $\bar{a} = x$.

L'algèbre $\mathcal{A}$ est dite *graduée-commutative* si elle est graduée et s'il existe une fonction $B : G \times G \to \mathbb{K}$ telle que pour tous éléments homogènes $a, b \in \mathcal{A}$,

$$a\, b = B(\bar{a}, \bar{b})\, b\, a. \tag{II.2}$$

L'algèbre $\mathcal{A}$ est dite *graduée-associative* si elle est graduée et s'il existe une fonction $F : G \times G \times G \to \mathbb{K}$ telle que pour tous éléments homogènes $a, b, c \in \mathcal{A}$,

$$a\,(b\, c) = F(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\,(a\, b)\, c. \tag{II.3}$$

Les algèbres admettant une telle structure, (II.2) et (II.3), sont appelées *quasi-algèbres* dans [AM99].

Une classe célèbre d'algèbres graduée-commutatives est la classe des algèbres supercommutatives, pour lesquelles $G = \mathbb{Z}_2$ et $\beta(\bar{a}, \bar{b}) = (-1)^{\bar{a}\bar{b}}$. Cette classe est née de la physique avec la nécessité de formaliser la symétrie boson/fermion. La généralisation des supersymétries de $\mathbb{Z}_2$ à tout G s'est avéré également nécessaire pour formaliser les symétries entre plusieurs types de particules. D'un point de vue mathématique les algèbres graduées offrent un cadre d'étude très large.

Dans la suite, on considerera principalement le cas où $G = \mathbb{Z}_2^n$ et, B et F sont de la forme

$$B = (-1)^{\beta}, \qquad F = (-1)^{\phi}$$

avec $\beta : \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ et $\phi : \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$.

Il est remarquable qu'un grand nombre d'algèbres classiques, comme les matrices, les quaternions, les octonions, les Clifford, entrent dans la classe des algèbres graduée-commutatives/-associatives.

1.1 Matrices et algèbres de Clifford

On s'intéresse ici aux algèbres associatives non-commutatives, qui se présentent comme graduée-commutatives.

Exemple 1.1. Le premier exemple est celui de l'algèbre des matrices $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Fixons ζ une racine primitive n-ième de l'unité et considérons la matrice diagonale D et la matrice de permutation cyclique C suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \zeta & & & \\ & & \zeta^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \zeta^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $\{C^k D^\ell, 1 \leq k, \ell \leq n\}$ forme une base de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, connue comme *base de Sylvester*. L'algèbre $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ est ainsi naturellemment graduée par le produit de groupes cycliques $G = C_n \times C_n$,

$$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{(k,\ell)\in G} \mathbb{C}(C^k D^\ell)$$

et devient graduée-commutative

$$(C^k D^\ell)(C^{k'} D^{\ell'}) = \zeta^{k\ell' - k'\ell}(C^{k'} D^{\ell'})(C^k D^\ell).$$

La présentation de l'algèbre comme graduée commutative n'est pas unique. La classification des graduations est donnée dans [BSZ01].

Exemple 1.2. L'algèbre réelle des quaternions $\mathbb{H}$ est également graduée-commutative. Plusieurs présentations sont possibles. On peut par exemple graduer $\mathbb{H}$ par $(\mathbb{Z}_2)^3$, voir [5], en attribuant les degrés suivants aux vecteurs de base

$$\begin{aligned} \bar{1} &= (0,0,0), \\ \bar{i} &= (0,1,1), \\ \bar{j} &= (1,0,1), \\ \bar{k} &= (1,1,0). \end{aligned} \tag{II.4}$$

On vérifie alors la propriété (II.2) pour $B = (-1)^{\langle , \rangle}$, où $\langle\, , \rangle$ est le produit scalaire usuel de vecteurs de $(\mathbb{Z}_2)^3$.

Exemple 1.3. L'exemple précédent se généralise aux algèbres de Clifford. Notons $C\ell_{p,q}$ l'algèbre de Clifford réelle à $n = p + q$ générateurs, $g_1, \ldots, g_n$, satisfaisant les relations

$$g_i g_j = -g_j g_i, \qquad g_i^2 = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq p \\ -1, & p < i \leq n. \end{cases} \tag{II.5}$$

L'algèbre de Clifford complexe se définit comme $C\ell_n = C\ell_{p,q} \otimes \mathbb{C}$, indépendamment du choix de la signature (p,q). Dans le cas complexe on peut toujours supposer que les générateurs satisfont $g_i^2 = -1$ pout tout i. On gradue ces algèbres par $\mathbb{Z}_2^{n+1}$ en posant

$$\begin{aligned} \overline{g_1} &= (1,0,0,\ldots,0,1), \\ \overline{g_2} &= (0,1,0,\ldots,0,1), \\ &\vdots \\ \overline{g_n} &= (0,0,0\ldots,1,1). \end{aligned} \tag{II.6}$$

Les éléments homogènes sont les produits de générateurs $g = g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_k}$ de degré $\overline{g} = \overline{g_{i_1}} + \overline{g_{i_2}} + \cdots + \overline{g_{i_k}}$. On vérifie alors la propriété (II.2) pour $B = (-1)^{\langle , \rangle}$, où $\langle\, , \rangle$ est le produit scalaire usuel de vecteurs de $(\mathbb{Z}_2)^{n+1}$. En particulier pour $i \neq j$ on a $g_i g_j = (-1)^1 g_j g_i$. D'autres graduations pour ces algèbres sont possibles, voir plus loin Exemple 1.7 et Remarque 1.8.

Dans [6], on s'intéresse aux algèbres associatives graduée-commutatives avec $B = (-1)^\beta$, où $\beta : G \times G \to \mathbb{Z}_2$. Dans ce cas β est nécessairement bi-additive, i.e.

$$\beta(x + x', y) = \beta(x,y) + \beta(x',y), \qquad \beta(x, y + y') = \beta(x,y) + \beta(x,y').$$

Théorème 1.4 ([6]). *Une algèbre simple, associative, graduée-commutative au-dessus d'un groupe abélien G de type fini, avec défaut de commutativité de la forme $B = (-1)^\beta$, est isomorphe à une algèbre de Clifford graduée par* (II.6).

En utilisant la classification des algèbres de Clifford, on en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1.5. *Une algèbre simple, associative, graduée-commutative au-dessus d'un groupe abélien G de type fini, avec défaut de commutativité de la forme $B = (-1)^\beta$, est isomorphe à*

— $C\ell_{2m} \simeq \mathrm{Mat}_{2^m}(\mathbb{C})$, *pour un certain m, dans le cas complexe,*

— $C\ell_{p,q} \simeq \begin{cases} \mathrm{Mat}_N(\mathbb{R}), & N = 2^{\frac{p+q}{2}}, \quad p-q = 0,2 \mod 8 \\ \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}), & N = 2^{\frac{p+q-1}{2}}, \quad p-q = 3,7 \mod 8 \\ \mathrm{Mat}_N(\mathbb{H}), & N = 2^{\frac{p+q}{2}}, \quad p-q = 4,6 \mod 8 \end{cases}$, *pour un certain couple (p,q), dans le cas réel.*

1.2 Algèbres de groupes tordues

De nombreuses algèbres graduée-commutatives/associatives s'obtiennent comme déformations d'algèbres de groupe $\mathbb{K}[G]$. Etant donnée une fonction, dite fonction de *torsion*,

$$T : G \times G \to \mathbb{K},$$

on définit l'algèbre $(\mathbb{K}[G], T)$ comme l'espace de base formelle $\{u_x, x \in G\}$,

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{x \in G} \mathbb{K} u_x$$

muni du produit donné sur les éléments de base par

$$u_x u_y = T(x,y) u_{x+y}.$$

Cette classe d'algèbre a été étudiée dans [Con64].

Dans la suite on s'interesse au cas particulier

$$G = \mathbb{Z}_2^n, \qquad T = (-1)^f, \quad \text{avec } f : \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2,$$

et on note $(\mathbb{K}[\mathbb{Z}_2^n], f)$ l'algèbre de groupe tordue correspondante. Cette algèbre est clairement graduée-commutative et graduée-associative avec les défauts de commutativité et associativité donnés par

$$u_x\, u_y = (-1)^{\beta(x,y)}\, u_y\, u_x, \tag{II.7}$$

$$u_x\, (u_y\, u_z) = (-1)^{\phi(x,y,z)}\, (u_x\, u_y)\, u_z, \tag{II.8}$$

où β et ϕ s'expriment facilement en fonction de f :

$$\beta(x,y) = f(x,y) + f(y,x), \tag{II.9}$$

$$\phi(x,y,z) = f(y,z) + f(x+y,z) + f(x,y+z) + f(x,y). \tag{II.10}$$

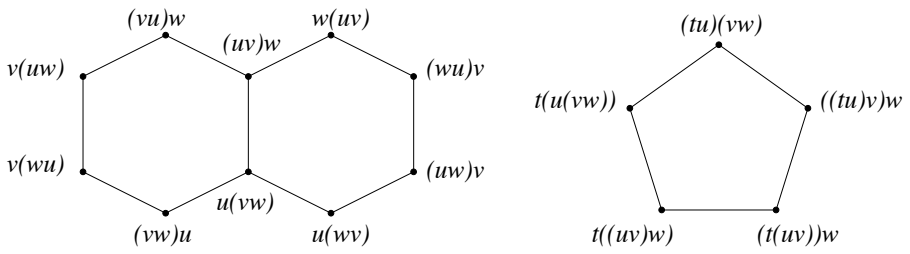


FIGURE II.1 – Relations hexagonale et pentagonale (MacLane)

Remarque 1.6. Dans une algèbre graduée satifaisant des relations du type (II.7), (II.8), les fonctions β et ϕ ne sont pas arbitraires. Des relations hexagonales et pentagonales doivent être satisfaites, voir Figure II.1.

Les relations hexagonales se traduisent par

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z)+\beta(x,y+z)+\phi(y,z,x)+\beta(z,x)+\phi(y,x,z)+\beta(x,y) &= 0\,, \\ \phi(x,y,z)+\beta(z,y)+\phi(x,z,y)+\beta(z,x)+\phi(z,x,y)+\beta(x+y,z) &= 0\,, \end{aligned} \tag{II.11}$$

et la relation pentagonale par

$$\phi(y,z,t)+\phi(x+y,z,t)+\phi(x,y+z,t)+\phi(x,y,z+t)+\phi(x,y,z)=0. \tag{II.12}$$

Cette dernière relation se reformule à l'aide de l'opérateur de cobord δ de cohomologie de groupes en

$$\delta\phi = 0.$$

Dans une algèbre de groupe tordue par f, la relation (II.10) s'exprime comme $\phi = \delta f$, on retrouve ainsi la condition $\delta\phi = 0$.

Notation 5. On introduit maintenant quelques notations relatives à la combinatoire binaire utiles pour la suite. Le groupe $G = \mathbb{Z}_2^n$ est également un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2 = (\mathbb{Z}_2, +, \times)$. Ces éléments sont vus comme des n-vecteurs de 0 et 1, i.e. $x \in \mathbb{Z}_2^n$ est représenté de manière unique par

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{Z}_2.$$

La base canonique de $\mathbb{Z}_2^n$ est formée des vecteurs

$$e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

où 1 est en i-ème position.
Le *poids* d'un vecteur $x \in \mathbb{Z}_2^n$ est donné par la distance de Hamming

$$|x| = \#\{x_i \neq 0\} \in \mathbb{N}.$$

Dans l'algèbre $(\mathbb{K}[\mathbb{Z}_2^n], f)$, les vecteurs de base u_{e_i}, $1 \leq i \leq n$, seront notés plus simplement

$$u_i := u_{e_i}.$$

Ces éléments engendrent l'algèbre $(\mathbb{K}[\mathbb{Z}_2^n], f)$. Tout monôme $u = u_{i_1} \cdots u_{i_k}$ (indépendamment du parenthésage) est homogène de degré

$$\bar{u} := \bar{u}_{i_1} + \cdots + \bar{u}_{i_k} = e_{i_1} + \cdots + e_{i_k}.$$

On dit qu'un élément homogène de l'algèbre est *pair*, resp. *impair*, si son degré est de poids pair, resp. impair. Le sous-espace engendré par les éléments pairs, resp. impairs, est appelé *partie paire*, resp. *partie impaire* de l'algèbre.

Notons enfin que l'élément $1 := u_{(0,\dots,0)}$ est l'unité de l'algèbre.

Exemple 1.7. (a) [AM02] L'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ ($\simeq C\ell_{0,2}$), et plus généralement les algèbres de Clifford $C\ell_{p,q}$, se réalisent comme déformations de l'algèbre de groupe $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^n]$, avec $n = p + q$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ éléments de $\mathbb{Z}_2^n$, la fonction de torsion est donnée par

$$f_{C\ell_{p,q}}(x, y) = \sum_{1\le i\le j\le n} x_i y_j + \sum_{1\le i\le p} x_i y_i. \tag{II.13}$$

En particulier, $f_{\mathbb{H}}(x, y) = x_1y_2 + x_1y_1 + x_2y_2$.

(b)[AM99] L'algèbre des octonions $\mathbb{O}$ se réalise également comme déformation de l'algèbre de groupe $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^n]$ avec fonction de torsion

$$f_{\mathbb{O}}(x, y) = (x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3) + \sum_{1\le i\le j\le 3} x_i y_j.$$

Le défaut d'associativité des octonions est dans ce cas donné simplement par la fonction

$$\phi(x, y, z) = \det(x, y, z), \quad x, y, z \in \mathbb{Z}_2^3.$$

Remarque 1.8. La graduation des algèbres de Clifford induite par (II.13) ne coïncide pas avec celle donnée en (II.6). Pour la graduation induite par (II.13) on a

$$\beta_{C\ell_{p,q}}(x, y) = \sum_{1\le i\ne j\le n} x_i y_j \ne \langle x, y\rangle.$$

L'algèbre $C\ell_{p,q}$ graduée par (II.6) est isomorphe à la partie paire de l'algèbre $(\mathbb{R}[(\mathbb{Z}_2)^{n+1}], f_{C\ell_{p,q+1}})$. En posant par exemple

$$g_i = u_i u_{n+1}, \quad 1 \le i \le n,$$

on vérifie $g_ig_j = -g_jg_i$ et $g_i^2 = u_i^2$. De plus, pour un élément pair $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$, on a $\sum x_i = 0$. Ainsi, sur la partie paire on vérifie aussi

$$\beta_{C\ell_{p,q+1}}(x, y) = \sum_{1\le i\ne j\le n+1} x_i y_j = \sum_{1\le i\le n+1} x_i y_i \;=\; \langle x, y\rangle,$$

car $0 = (\sum x_i)(\sum y_j) = \beta_{C\ell_{p,q+1}}(x, y) + \langle x, y\rangle$.

Exemple 1.9. [AM99] Les algèbres de Cayley-Dickson s'obtiennent comme déformations d'algèbres de groupe $(\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^n], f_{CD_n})$. La fonction de torsion se définit par induction

$$f_{CD_n}((x, x_n), (y, y_n)) = (1 - x_n)f_{CD_{n-1}}(x, y) + x_n f_{CD_{n-1}}(y, x) + y_n f_{CD_{n-1}}(x, x) + x_n y_n,$$

pour tous $x, y \in \mathbb{Z}_2^{n-1}$, $x_n, y_n \in \mathbb{Z}_2$.

1.3 La série $\mathbb{O}_{p,q}$, définition(s)

La série d'algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$ est une généralisation aux dimensions supérieures de l'algèbre des octonions classique $\mathbb{O}$. Cette généralisation est comparable à celle des quaternions $\mathbb{H}$ en algèbres de Clifford $C\ell_{p,q}$.

On propose ici plusieurs définition/caractérisations des algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$ permettant de justifier cette comparaison.

• **Définition comme déformation d'algèbre de groupe**.

Définition 1.10. [7] L'algèbre $\mathbb{O}_{p,q}$ est l'algèbre de groupe tordue $(\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^n], f_{\mathbb{O}_{p,q}})$ avec $n = p+q \geq 3$, et

$$f_{\mathbb{O}_{p,q}}(x,y) = \sum_{1\leq i<j<k\leq n} (x_i x_j y_k + x_i y_j x_k + y_i x_j x_k) + \sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_i y_j + \sum_{1\leq i\leq p} x_i y_i, \tag{II.14}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{Z}_2^n$. Le couple (p,q) est la *signature* de l'algèbre.

L'algèbre $\mathbb{O}_{0,3}$ est l'algèbre des octonions classique $\mathbb{O}$. La fonction de torsion $f_{\mathbb{O}_{p,q}}$ est une généralisation de la fonction $f_{\mathbb{O}}$ à plus de variables, tout comme l'est $f_{C\ell_{p,q}}$ vis à vis de $f_{\mathbb{H}}$, voir Exemple 1.7.

• **Définition par générateurs et relations**.

Proposition 1.11 ([7]). *L'algèbre $\mathbb{O}_{p,q}$ est l'unique algèbre réelle unitaire, admettant n générateurs $u_1, \ldots, u_n$, avec $n = p+q$, tels que*

$$\begin{aligned}
u_i^2 &= \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 1 \leq i \leq p, \\ -1 & \text{if} \quad p+1 \leq i \leq n, \end{cases} \\
u_i\, u_j &= -u_j\, u_i, \quad i \neq j \leq n. \\
u_i\,(u_j\, u_k) &= -(u_i\, u_j)\, u_k, \quad 1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq n \\
u_i\,(u_i\, u_j) &= u_i^2\, u_j, \quad i \neq j \leq n.
\end{aligned}$$

et tels que pour tous monômes u, v, w en u_i

$$u\,(v\,w) = \pm(u\,v)\,w,$$

avec le signe dépendant uniquement du triplet $\{u, v, w\}$.

Cette proposition permet de voir l'algèbre $\mathbb{O}_{p,q}$ comme une version non-associative de l'algèbre $C\ell_{p,q}$.

• **Définition comme extension non-associative de $C\ell_{p,q-1}$.**

Proposition 1.12 ([11]). *L'algèbre $\mathbb{O}_{p,q}$ se décompose en*

$$\mathbb{O}_{p,q} \simeq C\ell_{p,q-1} \oplus (C\ell_{p,q-1} \cdot u).$$

où u est un élément satisfaisant :

$$u^2 = -1, \quad uc_1 = -c_1 u, \quad (c_1c_2)u = -c_1(c_2u) = (c_2u)c_1, \quad (c_1u)(c_2u) = -c_1c_2,$$

pour tous éléments non-scalaires $c_1, c_2 \in C\ell_{p,q-1}$.

Cette présentation est une modification de la présentation précédente, et s'interprète comme une extension de $C\ell_{p,q-1}$ (cas $q \neq 0$) par l'ajout d'un générateur anti-commutant et anti-associant avec les éléments de $C\ell_{p,q-1}$. Une illustration est donnée dans le cas $\mathbb{H}(\simeq C\ell_{0,2})$ et $\mathbb{O}(\simeq \mathbb{O}_{0,3})$ par la Figure II.2. La mutliplication dans $\mathbb{O}$ est codée par le plan de Fano, dans lequel les points n'appartenant pas à une même droite projective représentent les éléments de l'algèbre qui s'anti-associent.

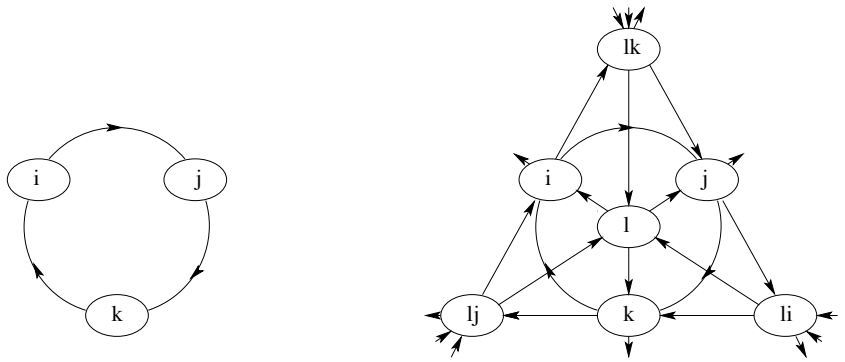


FIGURE II.2 – Multiplication dans $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$.

1.4 La série $\mathbb{O}_{p,q}$, caractérisation

On caractérise ici les algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$ dans la classe des algèbres de groupe tordues $\mathcal{A}_f := (\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^n], f)$.

Définition 1.13. Une fonction $\alpha : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ est appelée *fonction génératrice* de $\mathcal{A}_f$, si

$$\begin{array}{llll} (i) & f(x,x) & = & \alpha(x), \\ (ii) & \beta(x,y) & = & \alpha(x+y)+\alpha(x)+\alpha(y), \\ (iii) & \phi(x,y,z) & = & \alpha(x+y+z)+\alpha(x+y)+\alpha(x+z)+\alpha(y+z)+\alpha(x)+\alpha(y)+\alpha(z), \end{array}$$

pour tous x, y, z dans $\mathbb{Z}_2^n$.

Théorème 1.14 ([7]). *(i) Une algèbre de groupe tordue $\mathcal{A}_f$ admet une fonction génératrice si et seulement si la fonction ϕ est symétrique.*

(ii) Les fonctions génératrices sont des expressions polynomiales de degré au plus 3.

Sur $\mathbb{Z}_2$ les expressions polynomiales ne sont pas uniques du fait que $x^2 = x$. Par degré, on entend ici "le plus petit degré" des polynômes représentant la fonction.

Il est facile de vérifier que les algèbres $C\ell_{p,q}$ et $\mathbb{O}_{p,q}$ admettent des fonctions génératrices, contrairement aux algèbres de Cayley-Dickson. On a

$$\begin{array}{lllll} \alpha_{C\ell_{p,q}}(x) & = & f_{C\ell_{p,q}}(x,x) & = & \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j + \sum_{p<i\leq n} x_i, \\ \alpha_{\mathbb{O}_{p,q}}(x) & = & f_{\mathbb{O}_{p,q}}(x,x) & = & \sum_{1\leq i<j<k\leq n} x_i x_j x_k + \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j + \sum_{p<i\leq n} x_i. \end{array}$$

Les fonctions $\alpha_{C\ell_{0,n}}$ et $\alpha_{\mathbb{O}_{0,n}}$ étant invariantes par permutations des coordonnées, elles ne dépendent que du poids des éléments

$$\begin{aligned} \alpha_{C\ell_{0,n}}(x) &= \begin{cases} 0, & \text{si} \quad |x| \equiv 0,3 \bmod 4 \\ 1, & \text{sinon} \end{cases} \\ \alpha_{\mathbb{O}_{0,n}}(x) &= \begin{cases} 0, & \text{si} \quad |x| \equiv 0 \bmod 4 \\ 1, & \text{sinon} \end{cases} . \end{aligned} \tag{II.15}$$

La fonction génératrice "code" entièrement l'algèbre, et remplace la donnée d'une fonction de 2 variables $f(x,y)$ par une fonction d'une variable. Les termes linéaires codent les carrés des générateurs, les termes quadratiques les relations de commutativité et les termes cubiques les relations d'associativité. Plus précisément, on a la correspondance suivante entre les termes apparaissant dans α et la structure de l'algèbre :

$$\begin{aligned} x_i &\iff u_i \text{ est de carré } +1 \\ x_i x_j,\ i \neq j &\iff u_i \text{ et } u_j \text{ commutent} \\ x_i x_j x_k,\ i \neq j \neq k \neq i &\iff u_i, u_j \text{ et } u_k \text{ anti-associent} \end{aligned}$$

Remarque 1.15. La condition "ϕ symétrique" est très naturelle dans une structure de quasi-algèbre. Elle équivaut au fait que pour tous éléments homogènes u, v, w le signe dans la relation $u\,(v\,w) = \pm(u\,v)\,w$ dépend uniquement du triplet $\{u, v, w\}$, et non de l'ordre dans lequel est effectué le produit. Par ailleurs cette condition a une signification cohomologique. Elle implique $\delta\beta = 0$ (à cause de (II.11))[1]. Pour une algèbre de groupe tordue $\mathcal{A}_f$, l'associativité équivaut à"f est un 2-cocycle" . L'hypothèse ϕ symétrique est un affaiblissement de la condition d'associativité en "le symétrisé de f est un 2-cocycle".

Théorème 1.16 ([7],[11])**.** *Toute fonction cubique $\alpha : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ définit une unique algèbre de groupe tordue $\mathcal{A}_f$, à isomorphisme près, ayant α comme fonction génératrice.*

L'existence a été donnée dans [7] et l'unicité dans [11]. L'unicité dans le Théorème 1.16 porte sur l'algèbre et non sur la fonction de torsion. La construction d'une fonction de torsion $f(x,y)$ peut se faire canoniquement à partir de l'expression de $\alpha(x)$ en utilisant la conversion suivante :

$$\begin{aligned} x_i x_j x_k &\longmapsto x_i x_j y_k + x_i y_j x_k + y_i x_j x_k, \\ x_i x_j &\longmapsto x_i y_j, \\ x_i &\longmapsto x_i y_i. \end{aligned} \tag{II.16}$$

pour tous $1 \leq i < j < k \leq n$.

1.5 La série $\mathbb{O}_{p,q}$, classification

Dans [7], un critère de simplicité pour les algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$ a été donné. Les algèbres sont dites *simples* si elles n'ont pas d'idéaux bilatères. On récapitule les résultats dans la colonne de droite du tableau Figure II.3, en comparaison avec les résultats sur les algèbres de Clifford.

La classification des algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$, à isomorphismes gradués près, a été établie dans [11].

1. Pour compléter la preuve du Théorème 1.14(i), on remarque qu'il n'existe pas de 2-cocycle symétrique non-trivial, voir e.g. [AM04], et ainsi il existe α tel que $\beta = \delta\alpha$. On peut normaliser pour avoir de plus $\alpha(x) = f(x,x)$.

Algèbres de Clifford	Algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$ [7]
$C\ell_{p,q}$ est simple ssi : $p+q \not\equiv 1 \mod 2$ ou $p+q \equiv 1 \mod 2$ et $p-q \equiv 3 \mod 4$	$\mathbb{O}_{p,q}$ est simple ssi : $p+q \not\equiv 0 \mod 4$ ou $p+q \equiv 0 \mod 4$ et $p,q \equiv 0 \mod 2$
lorsque $C\ell_{p,q}$ n'est pas simple, on a $C\ell_{p,q} \simeq \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$, avec $\mathcal{A} \simeq C\ell_{p-1,q} \simeq C\ell_{p,q-1}$	lorsque $\mathbb{O}_{p,q}$ n'est pas simple, on a $\mathbb{O}_{p,q} \simeq \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$, avec $\mathcal{A} \simeq \mathbb{O}_{p-1,q} \simeq \mathbb{O}_{p,q-1}$
lorsque $C\ell_{p,q}$ est simple, et $p+q \equiv 1 \mod 2$, on a $C\ell_{p,q} \simeq \mathcal{A}$ avec $\mathcal{A} \simeq C\ell_{p,q-1} \otimes \mathbb{C} \simeq C\ell_{p-1,q} \otimes \mathbb{C}$ ($\mathcal{A}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre indépendante de (p,q))	lorsque $\mathbb{O}_{p,q}$ est simple, et $p+q \equiv 0 \mod 4$, on a $\mathbb{O}_{p,q} \simeq \mathcal{A}$ avec $\mathcal{A} \simeq \mathbb{O}_{p,q-1} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{O}_{p-1,q} \otimes \mathbb{C}$ ($\mathcal{A}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre indépendante de (p,q))

FIGURE II.3 – Résultats de simplicité pour les algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$, en comparaison avec les algèbres de Clifford

Théorème 1.17 ([11]). *Si $pq \neq 0$, alors on a les isomorphismes d'algèbres graduées suivants*

(i) $\mathbb{O}_{p,q} \simeq \mathbb{O}_{q,p}$ *;*

(ii) $\mathbb{O}_{p,q+4} \simeq \mathbb{O}_{p+4,q}$ *;*

(iii) Tout isomorphisme d'algèbres graduées entre des algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$ s'obtient comme combinaison des isomorphismes ci-dessus.

(iv) Pour $n \geq 5$, les algèbres $\mathbb{O}_{n,0}$ et $\mathbb{O}_{0,n}$ ne sont pas isomorphes entre elles et ne sont isomorphes à aucune autre algèbre $\mathbb{O}_{p,q}$ avec $p+q=n$.

Remarque 1.18. Les isomorphismes d'algèbres graduées sont les isomorphismes qui envoient les éléments homogènes sur des éléments homogènes. Pour montrer la non-existence de tels isomorphismes on utilise une *statistique*

$$s(p,q) := \#\left\{x \in \mathbb{Z}_2^n : \alpha_{\mathbb{O}_{p,q}}(x) = 1\right\}.$$

Deux algèbres avec différentes statistiques ne peuvent pas être isomorphes au sens gradué. C'est un problème ouvert de savoir si elles sont isomorphes en tant qu'algèbres.

On illustre le Théorème 1.17 par la Figure II.4, où les statistiques des algèbres sont également données. Le point (i) du théorème se traduit par une symétrie verticale par rapport à $p-q=0$ et se compare la symétrie verticale par rapport à $p-q=1$ dans la table des Clifford :

$$C\ell_{p,q} \simeq C\ell_{q+1,p-1}.$$

Le point (ii) donne un périodicité modulo 4 sur les rangées $p+q$ constante, qui se retrouve aussi dans la table des Clifford :

$$C\ell_{p+4,q} \simeq C\ell_{p,q+4}.$$

La fameuse périodicité de Bott dans les algèbres de Clifford a également un analogue dans la série $\mathbb{O}_{p,q}$, voir [Kre14].

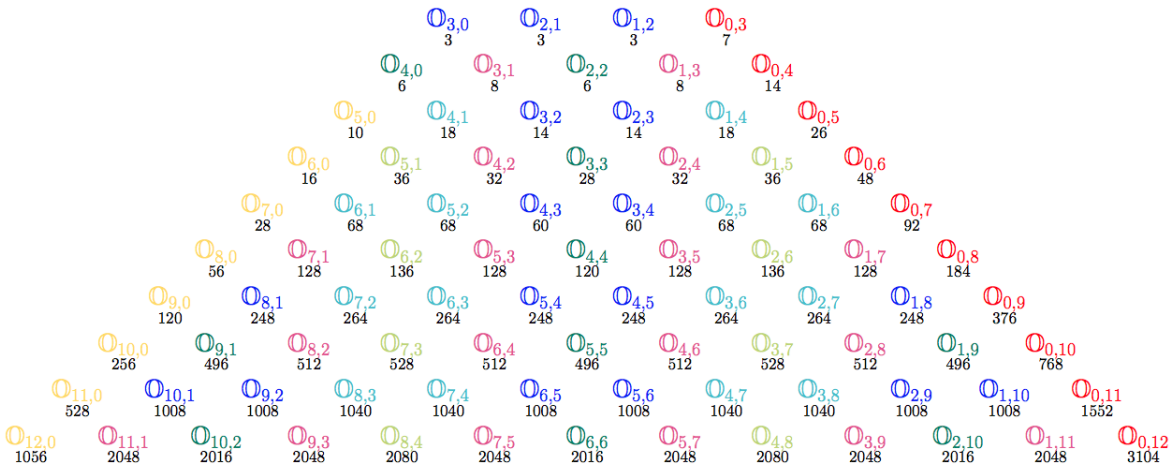


FIGURE II.4 – Symétries et statistiques dans la série $\mathbb{O}_{p,q}$. (Sur une rangée les algèbres de même couleur sont isomorphes.)

1.6 Perspectives

Les algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$ étant à la fois liées aux Clifford et à l'algèbre des octonions, un grand nombre de questions naturelles se posent pour les $\mathbb{O}_{p,q}$ au vu des résultats connus pour les algèbres classiques.

Pb II.1. Déterminer les groupes d'automorphismes et les algèbres de dérivations des $\mathbb{O}_{p,q}$.

On rappelle que l'algèbre $\mathbb{O}$ est liée à toutes les algèbres de Lie exceptionnelles, par exemple son algèbre des dérivations est de type G_2.

Pb II.2. Classifier les "bonnes graduations" des algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$.

Pb II.3. Étudier les relations avec les groupes **Spin** définis par les $C\ell_{p,q}$.

Un projet beaucoup plus vaste comprend la question suivante :

Pb II.4. Développer l'algèbre linéaire et la géométrie sur les algébres graduées commutatives.

Le développement de l'algèbre et l'analyse sur $\mathbb{H}$ est une question ancienne qui n'a pas de réponse reconnue comme définitive. La simple question de définir le déterminant des matrices 2×2 à coefficients quaternioniques peut être traitée selon plusieurs approches. Le point de vue "gradué" proposé dans notre travail [7] offre une nouvelle approche et permet des généralisations aux algèbres de Clifford. Ce point de vue a été exploité dans [COP12], [Cov12], [CM14].

Enfin, une autre direction possible est une direction combinatoire. Les fonctions f et α introduites aux paragraphes 1.3 et 1.4 permettent d'utiliser la combinatoire binaire pour construire des identités de Hurwitz de sommes de carrés ou des designs orthogonaux. Les avancées sur ce sujet sont développées en Section 2.

On peut noter également des liens avec la théorie des Moufang loops et des Code loops, voir [7] qui pourraient se généraliser en variant la combinatoire.

Pb II.5. Varier le corps $\mathbb{R}$ en $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ et le groupe $\mathbb{Z}_2^n$ en $G = \mathbb{Z}_p^n$ dans la définition des algèbres de groupes tordues.

2 Applications : problème de Hurwitz et combinatoire binaire

Une identité de sommes de carrés de taille $[r, s, N]$ est une identité de la forme

$$(a_1^2 + \cdots + a_r^2)\,(b_1^2 + \cdots + b_s^2) = c_1^2 + \cdots + c_N^2,$$

où les variables c_i sont des expressions bilinéaires en (a_j, b_k) à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On considère ces identités formellement dans l'anneau $\mathbb{Z}[a_j, b_k, j, k \in \mathbb{N}]$.

Problème de Hurwitz [Hur98] : Déterminer les triplets d'entiers (r, s, N) pour lesquelles une identité de taille $[r, s, N]$ existe.

Le triplet est *optimal* si à r et s fixés, N est le plus petit possible, ou si à s et N fixés, r est le plus grand possible. Un premier résultat est donné par Hurwitz.

Théorème 2.1 ([Hur98])**.** *Une identité* $[N, N, N]$ *existe si et seulement si* $N = 1, 2, 4$ *ou* 8.

Les identités peuvent s'obtenir en utilisant la propriété de multiplicativité de la norme euclidienne dans les algèbres de composition $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$. Par exemple, l'identité $[2, 2, 2]$

$$(a_1^2 + a_2^2)\,(b_1^2 + b_s^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2$$

s'interprète comme $|z_1|\,|z_2| = |z_1 z_2|$ pour $z_j = a_j + i b_j \in \mathbb{C}$. De même pour les identités $[4, 4, 4]$ et $[8, 8, 8]$. Cependant, ces identités étaient connues bien avant les algèbres de composition associées. Par exemple, l'identité $[2, 2, 2]$ apparait chez Diophante (3ème siècle), Brahmagupta (7ème siècle), Fibonacci (13ème siècle), l'identité $[4, 4, 4]$ chez Euler (1748) et l'identité $[8, 8, 8]$ chez Degen (1818).

Un deuxième résultat partiel du problème a été indépendamment donné par Hurwitz et par Radon. Le résultat fait intervenir la fonction $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, connue maintenant comme *fonction de Hurwitz-Radon*, définie par

$$\rho(N) = \begin{cases} 2n+1, & n \equiv 0 \mod 4 \\ 2n, & n \equiv 1, 2 \mod 4 \\ 2n+2, & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}, \qquad \text{si } N = 2^n(2m+1).$$

Théorème 2.2 ([Hur22], [Rad22])**.** *Une identité* $[r, N, N]$ *existe si et seulement si* $r \leq \rho(N)$.

Le problème de Hurwitz reste largement ouvert en toute généralité. Une identité célèbre de Lagrange donne une identité $[r, r, \frac{r(r-1)+2}{2}]$, mais le triplet est loin d'être optimal

$$(a_1^2 + \cdots + a_r^2)\,(b_1^2 + \cdots + b_r^2) = (a_1\, b_1 + \cdots + a_r\, b_r)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq r} (a_i\, b_j - b_j\, a_i)^2, \qquad \text{(II.17)}$$

La fonction de Hurwitz-Radon se retrouve dans différents contextes : champs de vecteurs sur les sphères, représentation des algèbres de Clifford, immersion d'espaces projectifs dans les espaces euclidiens...

Mentionnons les livres [Sha00], [Raj93] dédiés aux identités de sommes de carrés.

On propose aux paragraphes suivants des constructions d'identités reposant sur la combinatoire relative aux algèbres $\mathbb{O}_{p,q}$.

2.1 Identités de sommes de carrés dans $\mathbb{O}_{0,n}$

Considérons une algèbre de groupe tordue $(\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^n], f)$. Tout élément se décompose en

$$a = \sum_{x\in\mathbb{Z}_2^n} a_x\, u_x,$$

avec des coefficients arbitraires $a_x \in \mathbb{R}$. On définit (le carré de) la norme euclidienne d'un élément par

$$\|a\|^2 := \sum_{x\in\mathbb{Z}_2^n} a_x^2.$$

Étant donnés des sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{Z}_2^n$ on peut former les sous-espaces de coordonnées $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset (\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^n], f)$:

$$\mathcal{A} = \big\{a \mid a = \sum_{x\in A} a_x\, u_x\big\} \quad \text{and} \quad \mathcal{B} = \big\{b \mid b = \sum_{y\in B} b_y\, u_y\big\}.$$

Si la propriété suivante

$$\|a\|^2\, \|b\|^2 = \|a\, b\|^2, \tag{II.18}$$

est vraie pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$, alors on obtient une identité de taille $[|A|, |B|, |A+B|]$, où la notation $|\cdot|$ désigne le cardinal de l'ensemble.

L'idée est donc de trouver des "bons" sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{Z}_2^n$ pour avoir la multiplicativité des normes (II.18) entre les espaces associés. Par calcul, on établit facilement le lemme suivant.

Lemme 2.1. *L'identité* (II.18) *est satisfaite si et seulement si pour tout $x \neq x' \in A$ et $y \neq y' \in B$ tels que $x + x' + y + y' = 0$, on a*

$$f(x,y) + f(x,y') + f(x',y) + f(x',y') = 1. \tag{II.19}$$

Cette condition (ou sa version multiplicative) apparait souvent dans les recherches d'identités de sommes de carrés, voir e.g. [Yuz81], [Sha00]. En utilisant les algèbres $\mathbb{O}_{0,n}$ la condition (II.19) se simplifie drastiquement.

Lemme 2.2 ([7])**.** *L'identité* (II.18) *est satisfaite dans $\mathbb{O}_{0,n}$ si et seulement si pour tout $x \neq x' \in A$ et $y \neq y' \in B$ tels que $x + x' + y + y' = 0$, on a*

$$|x + x'| \not\equiv 0 \mod 4,$$

où $|x + x'|$ est le poids de l'élément $x + x' \in \mathbb{Z}_2^n$.

Autrement dit, la construction de "bons" sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{Z}_2^n$ est dictée par une règle combinatoire sur le poids des sommes d'éléments. Cette règle peut s'énoncer de manière plus générale en terme de fonctions cubiques (voir Remarque 2.6 plus loin). Par ailleurs, l'identité (II.18) s'obtient alors explicitement sous la forme

$$\Big(\sum_{x\in A} a_x^2\Big)\Big(\sum_{y\in B} b_y^2\Big) = \sum_{z\in A+B}\Big(\sum_{x\in A}(-1)^{f(x,x+z)}\, a_x b_{x+z}\Big)^2. \tag{II.20}$$

Corollaire 2.3 ([7]). *Si $B = \mathbb{Z}_2^n$ et $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ est tel que pour tout $x \neq x' \in A$ le poids $|x + x'|$ n'est pas un multiple de 4, alors* (II.20) *est une identité de Hurwitz-Radon* $[\,|A|, 2^n, 2^n]$.

Exemple 2.4. Dans le Corollaire 2.3, pour avoir une identité de Hurwitz-Radon optimale, il s'agit de plus de choisir A tel que $|A| = \rho(2^n)$. On propose ici de tels choix (pas uniques).

— Cas $n \equiv 1, 2 \mod 4$.
Dans ce cas, $\rho(2^n) = 2n$. L'ensemble suivant convient

$$A = \{0,\ e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_3,\ \ldots,\ e_1 + e_n\}\,.$$

En effet, pour tous éléments distincts $x, x' \in A$, le poids $|x + x'|$ est ≤ 3.

— Cas $n \equiv 3 \mod 4$.
Dans ce cas, $\rho(2^n) = 2n + 2$. Posons

$$\omega = (1, 1, \ldots, 1) = e_1 + \cdots + e_n.$$

On peut par exemple ajouter à l'ensemble A ci-dessus les éléments ω et $e_1 + \omega$. On peut aussi choisir l'ensemble suivant, plus "symétrique".

$$A' = \{0,\ \omega,\ e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n,\ e_1 + \omega,\ e_2 + \omega,\ \ldots,\ e_n + \omega\}\,.$$

En effet les seuls poids possibles pour la somme de deux éléments distincts de A' sont $1, 2, n - 1$ et $n - 2$, qui ne sont jamais multiples de 4.

— Cas $n \equiv 0 \mod 4$.
Dans ce cas, $\rho(2^n) = 2n + 1$. Il n'existe pas de sous-ensemble A satisfaisant les condition du Corollaire 2.3 et de cardinalité $2n + 1$. Néanmoins les identités s'obtiennent facilement par un procédé de doublage d'identités de taille $[2n + 2, 2^n, 2^n]$ avec $n \equiv 3\,($ mod 4).

Exemple 2.5. En prenant $A = B = \{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ (autrement dit les éléments de poids 1), on a $A + B = \{0, e_i + e_j, 1 \leq i < j \leq n\}$ (les éléments de poids 0 et 2). Les ensembles A et B satisfont les conditions du Lemme 2.1 et permettent d'obtenir l'identité de Lagrange (II.17).

Remarque 2.6. Si $\mathcal{A}_f$ admet une fonction génératrice α, reliée à f par le procédé (II.16), alors la condition (II.19) du Lemme 2.1 se simplifie en $\alpha(x + x') = 1$. Le lemme 2.2 est alors un cas particulier en prenant $f = f_{\mathbb{O}_{0,n}}$ et $\alpha = \alpha_{0,n}$.

2.2 Nouvelles séries d'identités

En dehors de la formule de Hurwitz-Radon peu de solutions au problème sont connues. Plusieurs approches ont été développées pour construire des triplets $[r, s, N]$, souvent basées sur des procédés récursifs dans les algèbres de Clifford et les algèbres de Cayley-Dickson, les livres [Raj93], [Sha00], sont dédiés à ce sujet.

On peut toutefois mentionner deux séries d'identités au "voisinage" des identités de Hurwitz-Radon.

Théorème 2.7 ([Yuz81], [Yuz84], [LS93]). *Il existe des identités de taille*

$$[2n + 2, 2^n - \varphi(n), 2^n],$$

où $\varphi(n)$ est donné par les coefficients binomiaux

$$\varphi(n) = \binom{n}{n/2},\ n \equiv 0 \mod 4, \qquad \varphi(n) = 2\binom{n-1}{(n-1)/2},\ n \equiv 1 \mod 4.$$

Théorème 2.8 ([Ang00]). *Il existe des identités de taille*

$$[2n\ ,\ 2^n - 2n\ ,\ 2^n - 2]\,. \tag{II.21}$$

En exploitant le Lemme 2.2, on obtient des nouvelles séries d'identités.

Théorème 2.9 ([8]). *(i) Pour tout n, il existe une identité de taille $[r, s, N]$ avec*

$$\begin{cases} r &= 2n, \\ s &= 2^n - 2\left(\binom{k-1}{2} + \ell + 1\right) n + 4\binom{k}{3} + 2\,k\,\ell, \\ N &= 2^n - 2\left(\binom{k-1}{2} + \ell + 1\right), \end{cases} \tag{II.22}$$

pour tous $1 \leq \ell < k \leq n$.

(ii) Si $n \equiv 3 \mod 4$, les identités ci-dessus s'améliorent en $[r+2, s-2, N]$, avec r, s, N comme dans (II.22).

Le cas particulier $\ell = 0, k = 1$, dans (II.22) redonne la formule (II.21). Pour d'autres petites valeurs de ℓ et k, on obtient les séries

$$[2n,\ 2^n - 4n + 4,\ 2^n - 4]\,, \qquad [2n,\ 2^n - 6n + 10,\ 2^n - 6]\,, \qquad [2n,\ 2^n - 8n + 16,\ 2^n - 8]\,.$$

Exemple 2.10. Pour des petites valeurs de n, k et ℓ on retrouve des formules optimales ou meilleures actuellement connues (voir [Sha00, pp.292–293], [SF96]). Pour $n = 5$, on obtient $[10, 12, 26]$, $[10, 16, 28]$ connues comme optimales. Pour $n = 6$, on obtient $[12, 38, 58]$, $[12, 44, 60]$ correspondant aux meilleures triplets connus. Pour $n = 7$, et $n = 8$ on obtient les triplets $[14, 88, 120]$, $[14, 96, 122]$, $[14, 104, 124]$, $[16, 86, 120]$, $[16, 94, 122]$, $[16, 102, 124]$, $[16, 218, 250]$, $[16, 228, 252]$, ... qui prolongent les valeurs données par les tables [Sha00], [SF96].

On obtient une deuxième série d'identités paramétrée par un entier $k < \frac{n}{2}$. Les valeurs de s et N sont données par des sommes de coefficients binomiaux.

Théorème 2.11 ([8]). *(i) Si $n \equiv 1 \mod 4$, il existe une identité de taille $[r, s, N]$, avec*

$$r = 2n, \qquad s = \sum_{0 \leq i \leq k-1} 2\binom{n}{m-i}, \qquad N = \sum_{0 \leq i \leq k} 2\binom{n}{m-i}, \tag{II.23}$$

où $m = (n-1)/2$ et $1 \leq k \leq m$.

(ii) Si $n \equiv 3 \mod 4$, l'identité s'améliore en $[r+2, s, N]$, avec r, s et N comme dans (II.23).

Le cas particulier $k = 1$, dans la formule (II.23) donne

$$\left[2n\ ,\ 2\binom{n}{m}\ ,\ 2\binom{n+1}{m}\right]\,, \qquad \left[2n+2\ ,\ 2\binom{n}{m}\ ,\ 2\binom{n+1}{m}\right], \tag{II.24}$$

pour $n \equiv 1 \mod 4$ et $n \equiv 3 \mod 4$, respectivement.

Exemple 2.12. Ces formules donnent les triplets $[10, 20, 30]$, $[16, 70, 112]$, $[18, 252, 420], \ldots$ Le premier triplet est connu pour être optimal, le deuxième étend $[16, 64, 112]$, que l'on trouve dans les tables [Sha00], p.294.

2.3 Identités optimales et designs orthogonaux

On mentionne brièvement dans cette partie une application du problème de Hurwitz en théorie de l'information, qui a fait l'objet de l'article [9]. On renvoie à cet article pour plus de détails et de références sur le sujet.

Les identités de sommes de carrés sont utilisées en théorie de l'information pour les communications sans fils, dans un modèle connu sous le nom de MIMO (pour *multiple input multiple output*) utilisant le codage STBC (pour *space-time block code*), [Ala98], [TJC99]. Le message à transmettre se présente comme une suite de nombres $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Le dispositif consiste en s antennes, qui emettent chacune un signal à N instants. Le signal émis par une antenne est un nombre parmi $\{0, \pm a_1, \ldots, \pm a_r\}$. La transmission du message est alors codée par une matrice A de taille $N \times s$ à coefficients dans $\{0, \pm a_1, \ldots, \pm a_r\}$ (les colonnes représentent les transmissions des antennes à chaque instant). Lors de la transmission les signaux s'altérent et les antennes réceptrices récupèrent des données approximatives. Pour reconstituer le message initial efficacement le code STBC utilise des matrices particulières appelés "designs orthogonaux".

Définition 2.13. (a) Un *design orthogonal réel* (ROD) de type $[r, s, N]$ est une matrice A de taille $N \times s$ à coefficients dans $\{0, \pm a_1, \ldots, \pm a_r\}$, satisfaisant

$$A^T A = \left(a_1^2 + \cdots + a_r^2\right) I_s,$$

où A^T est la transposée de A.

(b)Un *design orthogonal complexe* (COD) de type $[r, s, N]$ est une matrice Z de taille $N \times s$ à coefficients complexes $\{0, \pm z_1, \cdots, \pm z_r, \pm \overline{z_1}, \cdots, \pm \overline{z_r}$, satisfaisant

$$\overline{Z}^T Z = \left(|z_1|^2 + \cdots + |z_r|^2\right) I_s,$$

où $^-$ est l'opération de conjugaison complexe.

Proposition 2.14. *Un* ROD *de type* $[r, s, N]$ *existe si et seulement si une identité de sommes de carrés de taille* $[r, s, N]$ *existe.*

Autrement dit le design est une version matricielle de l'identité. Cette version était déjà connue de Hurwitz [Hur98]. Il n'est pas difficile de passer explicitement de l'une à l'autre. En appliquant A à un vecteur $b = (b_1, \ldots, b_s)^T$ on reconstitute l'identité

$$\|Ab\|^2 = \langle Ab, Ab\rangle = \langle b, A^T Ab\rangle = \left(a_1^2 + \cdots + a_r^2\right) \langle b, b\rangle = \|a\|^2 \|b\|^2$$

Par exemple les designs suivants donnent les identités $[2, 2, 2]$ et $[4, 4, 4]$ respectivement

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

et codent les multiplications dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ respectivement.

Dans ce contexte, le problème abstrait de Hurwitz et la question d'optimalité des triplets (r, s, N) s'interprètent comme des contraintes concrètes précises : s est un nombre d'antennes, r une quantité d'information, N le temps de transmission (ou temps de décodage). Il est alors naturel de construire les designs de sorte que pour s fixé

- le ratio r/N soit maximal, i.e. la quantité d'information transmise par unité de temps soit maximale,
- N minimal, i.e. le temps de transmission soit minimal.

Les réponses suivantes ont été apportées.

Théorème 2.15 ([Lia03]). *À s fixé, donné par $s = 2m$ ou $s = 2m-1$, le ratio maximal r/N pour un* COD *de type $[r, s, N]$, avec $r \neq s$ est*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2s}. \tag{II.25}$$

Théorème 2.16 ([AKP07],[AKM10]). *À s fixé, donné par $s = 2m$ ou $s = 2m-1$, pour tout* COD *de type $[r, s, N]$, avec $r \neq s$, et de ratio maximal r/N donné par* (II.25)*, on a*

$$N \geq \binom{2m}{m-1}, \qquad ou \qquad N \geq 2\binom{2m}{m-1} \tag{II.26}$$

selon si $s = 0, 1, 3 \mod 4$ ou $s = 2 \mod 4$, respectivement.

Construire des designs ayant ou approchant les caractéristiques optimales est un problème clé pour les ingénieurs en théorie de l'information. Diverses constructions ont été proposées, [AKP07], [AKM10], [DR12], [DR09],[Lia03], [LFX05]. Les constructions sont souvent au cas par cas et reposent sur des procédés récursifs de découpage des designs en blocs plus petits.

La méthode développée au §2.1 permet d'obtenir des résultats dans ce domaine.

- Les identités (II.24) induisent des COD de ratio maximal donné par (II.25) et de temps de décodage minimal donné par (II.26).
- Les identités de Hurwitz-Radon obtenu par le Corollaire 2.3 induisent des COD de ratio 1/2 ayant le temps de décodage mininal connu à ce jour.
- Les designs sont donnés par des formules explicites, et de manière unifiée.

Les constructions précises sont données dans [9].

Pour finir mentionnons que l'utilisation des mathématiques fondamentales et en particulier des algèbres non-associatives est une voie très prometteuse dans le domaine de la théorie de l'information, e.g. [Set10], [BO13]

2.4 Sumsets dans $\mathbb{Z}_2^n$

La relation entre le problème de Hurwitz et la combinatoire de $\mathbb{Z}_2^n$ peut s'utiliser dans les deux sens. On peut ainsi déduire des énoncés de type combinatoire additive ou théorie d'ensembles extrémaux à partir de la théorie de Hurwitz-Radon.

Le premier énoncé est dans la lignée du théorème classique *Oddtown Theorem*, [Ber69], ou encore des théorèmes de Frankl-Wilson [FW81].

Théorème 2.17 ([10]). *Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$, telle que pour toute paire de sous-ensembles distincts $F, F' \in \mathcal{F}$ le nombre d'éléments dans $F \cup F' \setminus F \cap F'$ n'est pas un multiple de 4. On a*

$$\mathcal{F} \leq \begin{cases} 2n, & n \equiv 0, 1, 2 \mod 4 \\ 2n+2, & n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

et ces bornes sont atteintes.

Le deuxième énoncé est à rapprocher du théorème de Freiman qui donne un contrainte de structure sur un ensemble $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ en fonction d'une contrainte sur $|A+A|$, "si $A+A$ est petit alors A n'est pas loin d'etre un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{Z}_2^n$". Ici on obtient une contrainte sur $|A|$ en fonction d'une contrainte de structure sur $A+A$.

Théorème 2.18 ([10]). *Soit $\alpha : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ une forme cubique et $A \subset \mathbb{Z}_2^n$. Si $\alpha_{|(A+A)\setminus\{0\}} = 1$. alors $|A| \leq \rho(2^n)$, où ρ est la fonction de Hurwitz-Radon.*

Enfin pour le dernier énoncé on introduit la notion de *quadruplet additif*. Pour $A, B \subset \mathbb{F}_2^n$, quatre éléments $x, x' \in A$, $y, y' \in B$ forment un quadruplet additif (x, x', y, y') si

$$x + x' + y + y' = 0.$$

Le quadruplet est dit *propre* si $x \neq x'$ et $y \neq y'$.

Le théorème de Balog-Szemerédi-Gowers [BS94, Gow01], dans le cas $\mathbb{Z}_2^n$ (voir [GT09]) dit que "$|A+B|$ croît lentement dès lors qu'il y a suffisamment de quadruplets additifs". L'énoncé suivant donne une forme réciproque.

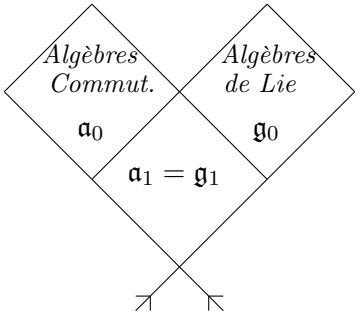
Théorème 2.19 ([10]). *Soit $\alpha : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ une forme cubique et $A, B \subset \mathbb{Z}_2^n$ avec $|A| \leq |B|$. Si pour tout quadruplet additif propre (x, x', y, y') on a $\alpha(x + x') = 1$, alors $|A + B| \geq \Omega(|A|^{\frac{6}{5}})$.*

Remarque 2.20. En choisissant $\alpha = \alpha_{\mathbb{O}_{0,n}}$ dans les Théorèmes 2.18 et 2.19 les contraintes deviennent des contraintes sur le poids des sommes d'éléments de A.

Remarque 2.21. La borne $\Omega(|A|^{\frac{6}{5}})$ s'obtient en appliquant un résultat technique de [HWY11].

3 Algèbres de Kaplansky-Jordan (antialgèbres de Lie)

Dans [Ovs11] une classe particulière de super-algèbres de Jordan, étudiée auparavant par Kaplansky et McCrimmon [McC94] a été redécouverte dans un contexte de géométrie symplectique et baptisées *anti-algèbres de Lie*. Ce nom vient d'une forte connection avec les (super)algèbres de Lie que l'on peut illustrer avec le dessin suivant :



La partie gauche représente la classe des algèbres commutatives associatives, et celle de droite les algèbres de Lie. Ces deux classes sont connues comme Koszul duales. Les anti-algèbres de Lie établissent un lien concret entre ces deux classes en utilisant les structures $\mathbb{Z}_2$-graduées. Une algèbre commutative $\mathfrak{a}_0$ est considérée comme partie paire d'une algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée-commutative $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ est elle partie paire d'une superalgèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Les algèbres sont engendrées par une même partie impaire $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{g}_1$.

3.1 Origine et premiers exemples

La structure d'anti-algèbre introduite dans [Ovs11] est dûe à l'existence d'un champ de bivecteurs impair $\mathbf{osp}(1,2)$-invariant. Considérons la super-variété $M = \mathbb{R}^{2,1}$, sur laquelle on note p, q, les coordonnées paires et τ la coordonnée impaire, munie de la forme symplectique standard

$$\omega = dp \wedge dq + \frac{1}{2} d\tau \wedge d\tau.$$

La forme ω est préservée sous l'action de la super-algèbre de Lie $\mathbf{osp}(1,2)$.

Une question naturelle est :

Question 1. Quels sont les champs de bivecteurs invariants sous l'action de $\mathbf{osp}(1,2)$?

On peut donner une première réponse immédiate en prenant l'inverse de ω,

$$\mathcal{P} = \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \wedge \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Mais il s'avère qu'il existe un autre bivecteur invariant non-trivial donné par

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial \tau} \wedge \mathcal{E} + \tau \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial q},$$

où $\mathcal{E} = p\frac{\partial}{\partial p} + q\frac{\partial}{\partial q} + \tau\frac{\partial}{\partial \tau}$ est le champ d'Euler.

Il semblerait que l'existence de ce deuxième bivecteur invariant Λ n'ait pas été observée avant les travaux de [Ovs11].

Théorème 3.1 ([Ovs11]). *Il n'existe pas d'autres bivecteurs invariants en dehors de $\mathcal{P}$ et Λ et de leurs combinaisons.*

Ces bivecteurs induisent naturellement des structures algébriques sur l'espace $C^\infty(M)$. Plus précisément, pour deux fonctions homogènes $F, G \in C^\infty(M)$, on construit les produits suivants, par dualité entre bivecteurs et 2-formes,

$$\begin{array}{lcll} \{F,G\} & := & \langle\, \mathcal{P}, dF \wedge dG \,\rangle & \rightsquigarrow \quad \text{super-algèbre de Lie (Poisson)} \\ ]F,G[& := & \frac{-(-1)^{|F|}}{2} \langle\, \Lambda\,, dF \wedge dG \,\rangle & \rightsquigarrow \quad ?\,? \end{array} \tag{II.27}$$

Le crochet $\{\,,\,\}$ associé au bivecteur pair $\mathcal{P}$ donne une structure bien connue de super-algèbre de Lie sur $C^\infty(M)$. Qu'en est-il du crochet $]\,,\,[$ défini par le bivecteur impair Λ ? Quelle structure algébrique lui est associée ?

Remarque 3.2. Le choix du signe $(-1)^{|F|}$, où $|F|$ désigne la parité de F, dans la définition de $]\,,\,[$ est fait pour rendre l'opération $]F,G[$ super-commutative (le coefficient $-\frac{1}{2}$ est juste une normalisation est n'est pas essentiel).

Exemple 3.3. Le sous-espace de $C^\infty(M)$ engendré par les fonctions quadratiques est stable sous le crochet $\{,\}$ et forme une super-algèbre de Lie isomorphe à $\mathbf{osp}(1,2)$. Le sous-espace de $C^\infty(M)$ engendré par les fonctions linéaires est lui stable sous le crochet $],[$, et forme (après inversion de parité) une super-algèbre de Jordan de dimension 3, isomorphe à l'algèbre connue sous le nom de *tiny Kaplansky* et notée K_3. Rappelons que K_3 se présente par un vecteur de base pair ε, et deux vecteurs de base impairs a, b, satisfaisant les règles de multiplication suivantes

$$\varepsilon\varepsilon = \varepsilon, \quad \varepsilon a = \tfrac{1}{2}a, \quad \varepsilon b = \tfrac{1}{2}b, \quad ab = \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

(ces relations s'obtiennent explicitement en utilsant la formule (II.27), en renommant ε, a, b les images de τ, q, p après inversion de parité, et en notant plus le produit implicitement au lieu de $]\,,\,[$).

On peut résumer cet exemple de la manière suivante.

$$\begin{array}{lcll} \{\text{ fonctions quadratiques }\} & = & < p^2, pq, q^2, p\tau, q\tau > & ;\ \{\,,\,\} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{osp}(1,2) \\ \{\text{ fonctions linéaires }\} & = & < p, q, \tau > & ;\ ]\,,\,[\quad \rightsquigarrow \quad K_3 \end{array}$$

Exemple 3.4. Plus généralement le sous-espace engendré par les fonctions F homogènes de degré 2 par rapport au champ eulerien, i.e. $\mathcal{E}(F) = 2F$, est stable sous $\{\,,\,\}$. Si on restreint de plus ce sous-espace aux fonctions rationnelles avec pôles possibles uniquement en $p = 0$ ou $q = 0$, alors on obtient une super-algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre conforme $\mathcal{K}(1)$, aussi connue comme algèbre de Neveu-Schwartz ou encore algèbre de Virasoro. Le sous-espace des fonctions homogènes de degré 1 est lui stable par $]\,,\,[$. En restreignant de plus aux fonctions rationnelles on obtient une algèbre de dimension infinie que l'on note $AK(1)$. Cette algèbre peut se décrire comme suit. Ses vecteurs de base pairs sont notés ε_n, $n \in \mathbb{Z}$, et les vecteurs de base impairs a_i, $i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Ils satisfont

$$\varepsilon_n\varepsilon_m = \varepsilon_{n+m}, \quad \varepsilon_n a_i = \tfrac{1}{2}a_{n+i}, \quad a_i a_j = \tfrac{1}{2}(i-j)\varepsilon_{i+j},$$

(ces relations s'obtiennent explicitement en utilsant la formule (II.27) en renommant ε_n and a_i les images de $\tau(\frac{q}{p})^n$ et $p(\frac{q}{p})^{i+\frac{1}{2}}$, resp. après inversion de parité). En résumé

$$\{\text{fonctions rationnelles deg } 2\} = < p^2\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}, \tau p\left(\frac{q}{p}\right)^{i+\frac{1}{2}} >_{n\in\mathbb{Z}, i\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \quad ; \quad \{\,,\,\} \rightsquigarrow \mathcal{K}(1)$$

$$\{\text{fonctions rationnelles deg } 1\} = < p\left(\frac{q}{p}\right)^{i+\frac{1}{2}}, \tau\left(\frac{q}{p}\right)^{n} >_{n\in\mathbb{Z}, i\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \quad ; \quad]\,,\,[\rightsquigarrow AK(1)$$

Remarque 3.5. Les algèbres K_3 et $AK(1)$ sont des super-algèbres de Jordan. Mais $C^\infty(M)$ munie de $]\,,\,[$ n'est pas une super-algèbre de Jordan.

Question 2. Quelles sont les propriétés générales de $]\,,\,[$? Quelles algèbres peuvent être construites à partir de ce crochet ?

3.2 Théorie générale

La question 2 et les exemples 3.3 et 3.4 ont motivé le développement de l'axiomatisation suivante.

Axiomes d'anti-algèbre de Lie

Définition 3.6. [Ovs11] Une anti-algèbre de Lie $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1$ est une algèbre super-commutative satisfaisant

(i) la partie paire $\mathfrak{a}_0$ est associative,

(ii) les multiplications à droite $R_y : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, $a \mapsto ay$, avec $y \in \mathfrak{a}_1$, sont des dérivations impaires,

(iii) la partie paire $\mathfrak{a}_0$ agit commutativement sur $\mathfrak{a}_1$, i.e. $x_1(x_2y) = x_2(x_1y)$ pour $x_1, x_2 \in \mathfrak{a}_0$, $y \in \mathfrak{a}_1$.

Remarque 3.7. Remarques sur les axiomes :

— $\mathfrak{a}_1$ n'est pas un $\mathfrak{a}_0$-module, car l'axiome (iii) équivaut à

$$\text{(iii')} \quad x_1(x_2y) = \tfrac{1}{2}(x_1x_2)y, \text{ pour } x_1, x_2 \in \mathfrak{a}_0,\ y \in \mathfrak{a}_1,$$

du fait de l'axiome (ii) ; cette action "divisée par 2" semble contre-nature à première vue mais s'avère essentielle pour le reste de la théorie ;

— les identités définissant les anti-algèbres de Lie sont toutes cubiques ;

— les super-algèbres demi-unitaires satisfaisant (i) et (iii') sont appelées *algèbres de Kaplansky* dans [McC94], en référence à un travail non publié de I. Kaplansky ;

— les axiomes (i) et (ii) impliquent que $\mathfrak{a}$ est une super-algèbre de Jordan, (obtenir les identités quartiques de Jordan à partir des identités cubiques (i)-(ii) n'est pas si aisé qu'il n'y parait, on peut trouver les calculs en détail dans [McC94] dans le cas où $\mathfrak{a}_0$ est elle-même de Jordan),

— si on suppose $\mathfrak{a}$ engendrée par la partie impaire alors les axiomes (ii) et (iii) impliquent l'associativité de $\mathfrak{a}_0$, i.e. l'axiome (i) (ceci a été observé dans [13] ; l'axiome (iii) joue un rôle crucial pour établir cette propriété).

Les anti-algèbres de Lie peuvent être vues comme un analogue $\mathbb{Z}_2$-gradué non-trivial des algèbres commutatives associatives.

Exemple 3.8. Les algèbres K_3 and $AK(1)$ sont des anti-algèbres de Lie. En revanche l'espace $C^\infty(M)$ muni de $]\,,\,[$ n'en est pas une.

Super-algèbre de Lie adjointe. Un point clé de la théorie des anti-algèbres de Lie est la relation avec la théorie des super-algèbres de Lie.

À partir d'une anti-algèbre de Lie $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1$, on construit une super-algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, telle que les espaces impairs coïncident $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{g}_0 = S^2_{\mathfrak{a}_0}\mathfrak{a}_1$ est l'espace des tenseurs symétriques d'éléments de $\mathfrak{a}_1$ au-dessus de $\mathfrak{a}_0$. En d'autres termes, les éléments de $\mathfrak{g}_0$ sont de la forme $y_1 \odot y_2$, avec $y_1, y_2 \in \mathfrak{a}_1$ et $\odot$ le produit tensoriel symétrique sur $\mathfrak{a}_0$, i.e.

$$\begin{cases} y_1 \odot y_2 &= y_2 \odot y_1, \\ y_1 x \odot y_2 &= y_1 \odot y_2 x, \qquad y_1, y_2 \in \mathfrak{a}_1, x \in \mathfrak{a}_0. \end{cases}$$

On définit un crochet sur $\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ en posant

$$\begin{aligned} [y_1, y_2] &= y_1 \odot y_2, \\ [y_1 \odot y_2, y_3] = -[y_3, y_1 \odot y_2] &= y_1(y_2 y_3) + y_2(y_1 y_3), \\ [y_1 \odot y_2, y_3 \odot y_4] &= [y_1 \odot y_2, y_3] \odot y_4 + [y_1 \odot y_2, y_4] \odot y_3, \end{aligned} \tag{II.28}$$

où y_1, y_2, y_3 et y_4 sont dans $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}_1$.

Ce crochet est en quelque sorte le crochet anti-symétrique le plus naturel que l'on puisse définir sur $\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$.

Proposition 3.9 ([Ovs11], [13])**.** *L'espace* $\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ *muni du crochet* (II.28) *forme une super-algèbre de Lie.*

La construction du super-crochet et la Proposition 3.9 sont dûes à [Ovs11]. La preuve de la Proposition 3.9 a été complétée dans [13]. Déduire les propriétés du super-crochet de Lie à partir de l'axiomatique des anti-algèbres de Lie n'est pas un exercice aussi facile qu'il n'y parait. Et il s'avère plutôt miraculeux que les axiomes se combinent parfaitement pour produire une super-algèbre de Lie. Là encore l'axiome (iii) est essentiel.

Exemple 3.10. Les algèbres introduites dans les exemples 3.3 et 3.4 sont reliées par

$$\mathfrak{g}(K_3) = \mathbf{osp}(1,2), \quad \mathfrak{g}(AK(1)) = \mathcal{K}(1).$$

A noter que dans cet exemple les algèbres de Lie adjointes coincident avec les algèbres de dérivations, mais en général ce n'est pas le cas. Il y a seulement un plongement

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \hookrightarrow \mathbf{Der}(\mathfrak{a}).$$

Remarque 3.11. Insistons sur le fait que la construction de la super-algèbre de Lie adjointe n'est pas équivalente à la construction de Tits-Kantor-Koecher (TKK).

Representations. Les anti-algèbres de Lie sont reliées à trois grandes classes d'algèbres : la classe des algèbres commutatives associatives, la classe des super-algèbres de Jordan, et celle des super-algèbres de Lie. Étant un cas particulier d'algèbres de Jordan, on peut appliquer la théorie classique des représentations des algèbres de Jordan aux anti-algèbres de Lie. Mais il apparait important d'adapter cette théorie classique pour tenir compte de la spécificité des anti-algèbres de Lie.

Définition 3.12 ([Ovs11],[13]). Une application linéaire $\varrho : \mathfrak{a} \to \mathrm{End}(V)$, où V est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, est une représentation d'anti-algèbre de Lie si

1. $\varrho(ab) = [\varrho(a)\,,\,\varrho(b)]_+$, pour tous $a, b \in \mathfrak{a}$, et
2. $\varrho(x_1x_2) = \varrho(x_1)\varrho(x_2)$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathfrak{a}_0$.

La notation $[\,,\,]_+$ est celle du crochet de Jordan usuel défini sur une super-algèbre associative par

$$[X, Y]_+ = \tfrac{1}{2}(XY + (-1)^{|X||Y|}YX),$$

alors que le commutateur usuel est noté $[\,,\,]$

$$[X, Y] = XY - (-1)^{|X||Y|}YX,$$

où X et Y sont des éléments homogènes de parité $|X|$ et $|Y|$.

Autrement dit, une représentation d'antialgèbre de Lie est une représentation de Jordan avec la condition supplémentaire que la restriction à la partie paire soit un morphisme d'algèbre associative.

La théorie des représentations de $\mathfrak{a}$ est liée à celle de $\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$.

Théorème 3.13 ([13]). *Soit $\mathfrak{a}$ une anti-algèbre de Lie et $\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ son adjointe.*

1. *Toute représentation $\varrho : \mathfrak{a} \to \mathrm{End}(V)$ induit une unique représentation $\tilde{\varrho} : \mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \to \mathrm{End}(V)$ telle que $\tilde{\varrho}(\mathfrak{g}_1) = \varrho(\mathfrak{a}_1)$.*
2. *Il existe un idéal $\mathcal{I}_{\mathfrak{a}}$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}(\mathfrak{a}))$ tel que toute représentation $\tilde{\varrho} : \mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \to \mathrm{End}(V)$ s'annulant sur $\mathcal{I}_{\mathfrak{a}}$ induit une unique représentation $\varrho : \mathfrak{a} \to \mathrm{End}(V)$ avec $\tilde{\varrho}(\mathfrak{g}_1) = \varrho(\mathfrak{a}_1)$.*

Le point (1) du théorème ci-dessus dit que les images des éléments impairs de $\mathfrak{a}$ engendrent dans $\mathrm{End}(V)$ muni du commutateur $[\,,\,]$ une représentation de $\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$. Ce fait est assez inattendu. La réciproque n'est pas vraie, il faut la condition supplémentaire donnée au point (2).

Exemple 3.14. Soit $\varrho : K_3 \to \mathrm{End}(V)$ une représentation arbitraire de K_3. Notons $A := \varrho(a)$, $B := \varrho(b)$ et $\mathcal{E} := \varrho(\varepsilon)$. Par définition on a dans $\mathrm{End}(V)$ les relations suivantes

$$\begin{cases} AB - BA &= \mathcal{E} \\ A\mathcal{E} + \mathcal{E}A &= A \\ B\mathcal{E} + \mathcal{E}B &= B \\ \mathcal{E}^2 &= \mathcal{E}. \end{cases} \tag{II.29}$$

Si on note maintenant $H := -(AB + BA)$, $E := A^2$ and $F := -B^2$. Ces trois éléments satisfont automatiquement les relations de $\mathbf{sl}(2)$, i.e.

$$\begin{cases} HE - EH &= 2E \\ HF - FH &= -2F \\ EF - FE &= H, \end{cases} \tag{II.30}$$

et avec de plus A, B ils satisfont les relations de $\mathbf{osp}(1, 2)$, i.e.

$$\begin{cases} [H, A] = A, & [E, A] = 0, & [F, A] = B, \\ [H, B] = -B, & [E, B] = A, & [F, B] = 0, \\ [A, B] = -H, & [A, A] = 2E, & [B, B] = -2F. \end{cases} \tag{II.31}$$

La réciproque n'est pas vraie les relations (II.30) et (II.31) ne suffisent pas à impliquer les relations (II.29). On a besoin de relations supplémentaires.

Proposition 3.15 ([12]). *Dans le cas $\mathfrak{a} = K_3$ l'idéal du Théorème 3.13 (2) est donné par*

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{a}} =< C >=< \Gamma^2 - \frac{1}{4} >$$

où C, resp. Γ, est l'élèment de Casimir, resp. Casimir fantôme, de $U(\mathbf{osp}(1,2))$.

Avec les notations ci-dessus, $C = EF + FE + \frac{1}{2}\left(H^2 + AB - BA\right)$ et $\Gamma = AB - BA - \frac{1}{2}\mathrm{Id}$. Autrement dit en ajoutant $C = 0$ ou $\Gamma^2 = \frac{1}{4}\mathrm{Id}$ aux relations (II.30) et (II.31) on déduit les relations (II.29).

Les représentations de K_3 en tant qu'anti-algèbre de Lie ont été étudiées dans [12]. La théorie des représentations des anti-algèbres de Lie, en particulier la notion d'algèbre enveloppante, a été développée dans [13].

3.3 Exemples à partir de surfaces de Riemann marquées

On présente ici une série d'anti-algèbres de Lie reliée aux algèbres de Krichever-Novikov. Cette série généralise $AK(1)$ de la même façon que les algèbres de Krichever-Novikov généralisent l'algèbre de Witt.

Soit Σ une surface de Riemann de genre g avec un ensemble $\mathcal{M}$ de N points marqués. Les points marqués sont les points où les fonctions méromorphes sur Σ peuvent avoir des pôles.

Notons $\mathcal{F}_\lambda$ la famille des modules des densités de poids λ. En général pour définir ces modules pour tous λ complexes on a besoin de fixer un logarithme. Dans ce qui suit on ne considèrera que les cas λ entier ou demi-entier.

L'espace $\mathcal{F}_0$ consiste simplement en les fonctions méromorphes sur Σ, holomorphes en-dehors de $\mathcal{M}$.

En genre $g = 0$ et dans le cas de $N = 2$ points marqués, l'algèbre de Lie $\mathcal{F}_{-1}$ est connue comme *algèbre de Witt*. En genre supérieur $g \geq 0$, et avec $N = 2$ points marqués, les algèbres de Lie $\mathcal{F}_{-1}$ sont connues comme *algèbres de Krichever-Novikov* [KN87b], [KN87a], [KN89]. Le cas général $g \geq 0$ et $N \geq 2$, a été étudié en détail par M.Schlichenmaier, [Sch90], voir aussi [Dic89].

On a des actions naturelles de $\mathcal{F}_{-1}$ sur elle-même (par commutateur) et de $\mathcal{F}_{-1}$ sur $\mathcal{F}_0$ (par dérivation). Ces actions peuvent s'unifier et se déformer naturellement en une famille d'actions à un paramètre donnant lieu aux modules $\mathcal{F}_\lambda$. En coordonnées locales, l'action de $\mathcal{F}_{-1}$ est donnée par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_{-1} \times \mathcal{F}_\lambda & \longrightarrow & \mathcal{F}_\lambda \\ \left(f(z)dz^{-1}, g(z)dz^\lambda\right) & \mapsto & \left(f(z)g'(z) + \lambda f'(z)g(z)\right)dz^\lambda. \end{array}$$

Cette opération se généralise en une opération anti-symétrique entre modules de densités

$$\begin{array}{rrcl} \{\ ,\ \}: & \mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\lambda & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\lambda+\mu+1} \\ & \left(f(z)dz^\mu, g(z)dz^\lambda\right) & \mapsto & \left(-\mu f(z)g'(z) + \lambda f'(z)g(z)\right)dz^{\lambda+\mu+1}. \end{array}$$

Notons également la multiplication entre densités

$$\begin{array}{rrcl} \bullet: & \mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\lambda & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\lambda+\mu} \\ & \left(f(z)dz^\mu, g(z)dz^\lambda\right) & \mapsto & f(z)g(z)dz^{\lambda+\mu}. \end{array}$$

L'espace de toutes les densités $\bigoplus_\lambda \mathcal{F}_\lambda$, muni de $\{\,,\}$ et $\bullet$, est une algèbre de Poisson

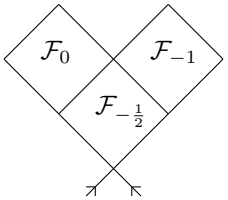
Théorème 3.16 ([14]). *L'espace $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_{-\frac{1}{2}}$ admet une structure naturelle d'anti-algèbre de Lie, donnée par le produit $\circ$*

$$\begin{aligned} f(z)\circ g(z) &:= f(z)\bullet g(z) \\ f(z)\circ \gamma(z)(dz)^{-\frac{1}{2}} &:= \tfrac{1}{2} f(z)\bullet \gamma(z)(dz)^{-\frac{1}{2}} \\ \varphi(z)(dz)^{-\frac{1}{2}}\circ \gamma(z)(dz)^{-\frac{1}{2}} &:= \left\{\varphi(z)(dz)^{-\frac{1}{2}}, \gamma(z)(dz)^{-\frac{1}{2}}\right\}. \end{aligned}$$

La super-algèbre de Lie adjointe s'identifie avec $\mathcal{F}_{-1}\oplus\mathcal{F}_{-\frac{1}{2}}$, muni du crochet

$$\begin{aligned} \left[f(z)(dz)^{-1}\,,\, g(z)(dz)^{-1}\right] &:= \left\{f(z)(dz)^{-1}, g(z)(dz)^{-1}\right\} \\ \left[f(z)(dz)^{-1}\,,\, \gamma(z)(dz)^{-\frac{1}{2}}\right] &:= \left\{f(z)(dz)^{-1}, \gamma(z)(dz)^{-\frac{1}{2}}\right\} \\ \left[\varphi(z)(dz)^{-\frac{1}{2}}\,,\, \gamma(z)(dz)^{-\frac{1}{2}}\right] &:= \tfrac{1}{2}\varphi(z)(dz)^{-\frac{1}{2}}\bullet\gamma(z)(dz)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient une réalisations concrètes de notre illustration de départ !



Remarque 3.17. Dans le cas $g = 0$, $N = 2$, l'algèbre $\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_{-\frac{1}{2}}$ obtenue redonne l'algèbre $AK(1)$. Dans le cas $g = 0$, $N = 3$, l'algèbre obtenue est du même type que les algèbres définies algébriquement dans [Zhe09], comme nouveau type de super-algèbres de Jordan.

Remarque 3.18. Mentionnons que des calculs de cocycles des anti-algèbres et des super-algèbres de Lie de type Krichever-Novikov ont été réalisés dans [Kre13].

3.4 Perspectives

Les anti-algèbres de Lie offrent un analogue $\mathbb{Z}_2$-gradué non-trivial pour la classe des algèbres commutatives associatives. Elles suggèrent de nouvelles relations entre la théorie de Jordan et la théorie de Lie. De nombreuses directions de la théorie sont encore à explorer. On propose ci-dessous une liste de directions possibles.

Pb II.6. Peut-on construire une anti-algèbre de Lie à partir d'une super-algèbre de Lie ? Quel est le lien entre les super-algèbres de Lie $\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ et celles obtenues par TKK à partir de $\mathfrak{a}$?

Pb II.7. La relation $\mathbf{osp}(1,2) = \mathbf{Der}(K_3)$ est cruciale dans la construction de [BE02]. Peut-on étendre les résultats de [BE02] en considérant la relation $\mathcal{K}(1) = \mathbf{Der}(AK(1))$?

Pb II.8. Dans [13] l'algèbre enveloppante $U(K_3)$ s'identifie au quotient de $U(\mathbf{osp}(1,2))$ par l'idéal $\mathcal{I}_{K_3}$ et se présente ainsi comme une algèbre de Weyl généralisée, c.f equation (2.1) de [BvO00]. A-t-on des relations similaires en toute généralité entre les algèbres enveloppantes $U(\mathfrak{a})$ et les algèbres de Weyl généralisées ?

Des questions ouvertes plus larges, comme l'utilisation des anti-algèbres de Lie en physique mathématique, et les possibles liens avec les systèmes intégrables sont également des directions naturelles à explorer.

Références Partie I

[AD11] Ibrahim Assem and Grégoire Dupont. Friezes and a construction of the Euclidean cluster variables. *J. Pure Appl. Algebra*, 215(10) :2322–2340, 2011.

[ADSS12] Ibrahim Assem, Grégoire Dupont, Ralf Schiffler, and David Smith. Friezes, strings and cluster variables. *Glasg. Math. J.*, 54(1) :27–60, 2012.

[And78] Désiré André. Terme général d'une série quelconque déterminée à la façon des séries récurrentes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (2)*, 7 :375–408, 1878.

[ARS10] Ibrahim Assem, Christophe Reutenauer, and David Smith. Friezes. *Adv. Math.*, 225(6) :3134–3165, 2010.

[BC22] J. L. Burchnall and T. W. Chaundy. Commutative Ordinary Differential Operators. *Proc. London Math. Soc.*, S2-21(1) :420, 1922.

[BCI74] D. Broline, D. W. Crowe, and I. M. Isaacs. The geometry of frieze patterns. *Geometriae Dedicata*, 3 :171–176, 1974.

[BD12] Jean-Philippe Burelle and Grégoire Dupont. Quantum frieze patterns in quantum cluster algebras of type A. *Int. Electron. J. Algebra*, 12 :103–115, 2012.

[BFZ96] Arkady Berenstein, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky. Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices. *Adv. Math.*, 122(1) :49–149, 1996.

[BHJ14] Christine Bessenrodt, Thorsten Holm, and Peter Jørgensen. Generalized frieze pattern determinants and higher angulations of polygons. *J. Combin. Theory Ser. A*, 123 :30–42, 2014.

[BM09] Karin Baur and Robert J. Marsh. Frieze patterns for punctured discs. *J. Algebraic Combin.*, 30(3) :349–379, 2009.

[BR10] François Bergeron and Christophe Reutenauer. SL_k-tilings of the plane. *Illinois J. Math.*, 54(1) :263–300, 2010.

[CC73] J. H. Conway and H. S. M. Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns. *Math. Gaz.*, 57(400) :87–94, 175–183, 1973.

[CC06] Philippe Caldero and Frédéric Chapoton. Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations. *Comment. Math. Helv.*, 81(3) :595–616, 2006.

[Cob22] Arthur B. Coble. Associated sets of points. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 24(1) :1–20, 1922.

[Cox69] H. S. M. Coxeter. *Introduction to geometry.* John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, second edition, 1969.

[Cox71] H. S. M. Coxeter. Frieze patterns. *Acta Arith.*, 18 :297–310, 1971.

[CR72] Craig M. Cordes and D. P. Roselle. Generalized frieze patterns. *Duke Math. J.*, 39 :637–648, 1972.

[CR94] H. S. M. Coxeter and J.F Rigby. *The Lighter Side of Mathematics*, chapter Frieze Patterns, Triangulated Polygons and Dichromatic Symmetry, pages 15–27. Washington D.C. : The Mathematical Association of America, 1994.

[Cun13] Michael Cuntz. Frieze patterns as root posets and affine triangulations. arXiv :1307.7986, 2013.

[DFK09] Philippe Di Francesco and Rinat Kedem. Positivity of the T-system cluster algebra. *Electron. J. Combin.*, 16(1) :Research Paper 140, 39, 2009.

[DS84] V. G. Drinfel′d and V. V. Sokolov. Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type. In *Current problems in mathematics, Vol. 24*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 81–180. Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984.

[EP00] David Eisenbud and Sorin Popescu. The projective geometry of the Gale transform. *J. Algebra*, 230(1) :127–173, 2000.

[Ess14] Magnani Kodjo Essonana. Friezes of type D. arXiv :1405.0548, 2014.

[FM14] Vladimir Fock and Andrei Marshakov. Loop groups, clusters, dimers and integrable systems. preprint arXiv :1401.1606, 2014.

[FZ02a] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :497–529, 2002.

[FZ02b] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. The Laurent phenomenon. *Adv. in Appl. Math.*, 28(2) :119–144, 2002.

[FZ03] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.*, 154(1) :63–121, 2003.

[FZ07] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. IV. Coefficients. *Compos. Math.*, 143(1) :112–164, 2007.

[Gal56] David Gale. Neighboring vertices on a convex polyhedron. In *Linear inequalities and related system*, Annals of Mathematics Studies, no. 38, pages 255–263. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956.

[GK13] Alexander B. Goncharov and Richard Kenyon. Dimers and cluster integrable systems. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 46(5) :747–813, 2013.

[Gli11] Max Glick. The pentagram map and Y-patterns. *Adv. Math.*, 227(2) :1019–1045, 2011.

[GM82] I. M. Gel′fand and R. D. MacPherson. Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm. *Adv. in Math.*, 44(3) :279–312, 1982.

[Gra13] Jan E. Grabowski. Graded cluster algebras. arXiv :1309.6170, 2013.

[GSTV12] Michael Gekhtman, Michael Shapiro, Serge Tabachnikov, and Alek Vainshtein. Higher pentagram maps, weighted directed networks, and cluster dynamics. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, 19 :1–17, 2012.

[GSV10] Michael Gekhtman, Michael Shapiro, and Alek Vainshtein. *Cluster algebras and Poisson geometry*, volume 167 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[GSVT14] Michael Gekhtman, Michael Shapiro, Alek Vainshtein, and Serge Tabachnikov. Integrable cluster dynamics of directed networks and pentagram maps. arXiv :1406.1883, 2014.

[Guo13] L. Guo. On tropical friezes associated with Dynkin diagrams. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (18) :4243–4284, 2013.

[HJ13] Thorsten Holm and Peter Jørgensen. SL_2-tilings and triangulations of the strip. *J. Combin. Theory Ser. A*, 120(7) :1817–1834, 2013.

[HJ14] Thorsten Holm and Peter Jørgensen. Generalised friezes and a modified Caldero-Chapoton map depending on a rigid object. *Nagoya Math. J., to appear.*, 2014.

[IIK+10] Rei Inoue, Osamu Iyama, Atsuo Kuniba, Tomoki Nakanishi, and Junji Suzuki. Periodicities of T-systems and Y-systems. *Nagoya Math. J.*, 197 :59–174, 2010.

[Jor39] Charles Jordan. *Calculus of Finite Differences.* Hungarian Agent Eggenberger Book-Shop, Budapest, 1939.

[Kap93] M. M. Kapranov. Chow quotients of Grassmannians. I. In *I. M. Gel′fand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 29–110. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[Kel10] Bernhard Keller. Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories. In *Triangulated categories*, volume 375 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 76–160. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[Kel11] Bernhard Keller. Algèbres amassées et applications (d'après Fomin-Zelevinsky, ...). *Astérisque*, (339) :Exp. No. 1014, vii, 63–90, 2011. Séminaire Bourbaki. Vol. 2009/2010. Exposés 1012–1026.

[Kel13] Bernhard Keller. The periodicity conjecture for pairs of Dynkin diagrams. *Ann. of Math. (2)*, 177(1) :111–170, 2013.

[KNS94] Atsuo Kuniba, Tomoki Nakanishi, and Junji Suzuki. Functional relations in solvable lattice models. I. Functional relations and representation theory. *Internat. J. Modern Phys. A*, 9(30) :5215–5266, 1994.

[Kri14] Igor Krichever. Commuting difference operators and the combinatorial Gale transform. arXiv :1403.4629, 2014.

[KS11] Bernhard Keller and Sarah Scherotzke. Linear recurrence relations for cluster variables of affine quivers. *Adv. Math.*, 228(3) :1842–1862, 2011.

[KS13a] Boris Khesin and Fedor Soloviev. The geometry of dented pentagram maps. arXiv :1308.5363, 2013.

[KS13b] Boris Khesin and Fedor Soloviev. Integrability of higher pentagram maps. *Math. Ann.*, 357(3) :1005–1047, 2013.

[KV14] Rinat Kedem and Panupong Vichitkunakorn. T-systems and the pentagram map. arXiv :1405.6758, 2014.

[Lau14] Adrien Laurent. Rapport de stage : Frises, 2014.

[LS13] Kyungyong Lee and Ralf Schiffler. Positivity for cluster algebras. arXiv :1306.2415, 2013.

[Mar12] Jean-François Marceau. Pavages additifs. arXiv :1205.5213, 2012.

[Mar13] Robert J. Marsh. *Lecture notes on cluster algebras.* Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2013.

[MB13a] Gloria Marí Beffa. On generalizations of the pentagram map : discretizations of AGD flows. *J. Nonlinear Sci.*, 23(2) :303–334, 2013.

[MB13b] Gloria Marí Beffa. On integrable generalizations of the pentagram map. arXiv :1303.4295, 2013.

[MS13] Robert J. Marsh and Jeanne Scott. Twists of Plücker coordinates as dimer partition functions. arXiv :1309.6630, 2013.

[OST10] Valentin Ovsienko, Richard Schwartz, and Serge Tabachnikov. The pentagram map : A discrete integrable system. *Comm. Math. Phys.*, 299(2) :409–446, 2010.

[OST13] Valentin Ovsienko, Richard Evan Schwartz, and Serge Tabachnikov. Liouville-Arnold integrability of the pentagram map on closed polygons. *Duke Math. J.*, 162(12) :2149–2196, 2013.

[OT13] Valentin Ovsienko and Serge Tabachnikov. Coxeter's frieze patterns and discretization of the Virasoro orbit. arXiv :1312.3021, 2013.

[Pec14] Oliver Pechenik. Cyclic sieving of increasing tableaux and small Schröder paths. *J. Combin. Theory Ser. A*, 125 :357–378, 2014.

[Pol54] G. Polya. *Induction and analogy in mathematics. Mathematics and plausible reasoning, vol. I.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

[Pro05] James Propp. The combinatorics of frieze patterns and Markoff numbers. arxiv math/0511633, 2005.

[Sch92] Richard Schwartz. The pentagram map. *Experiment. Math.*, 1(1) :71–81, 1992.

[Sch13] Richard Evan Schwartz. Pentagram spirals. *Exp. Math.*, 22(4) :384–405, 2013.

[She76] G. C. Shephard. Additive frieze patterns and multiplication tables. *Math. Gaz.*, 60(413) :178–184, 1976.

[Sol13] Fedor Soloviev. Integrability of the pentagram map. *Duke Math. J.*, 162(15) :2815–2853, 2013.

Références Partie II

[AKM10] Sarah Spence Adams, Nathaniel Karst, and Mathav Kishore Murugan. The final case of the decoding delay problem for maximum rate complex orthogonal designs. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 56(1) :103–112, 2010.

[AKP07] Sarah Spence Adams, Nathaniel Karst, and Jonathan Pollack. The minimum decoding delay of maximum rate complex orthogonal space-time block codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 53(8) :2677–2684, 2007.

[Ala98] S.M Alamouti. A simple transmit diversity technique for wireless communications. *IEEE J. Sel. Areas Commun*, 16 :1451–1458, 1998.

[AM99] Helena Albuquerque and Shahn Majid. Quasialgebra structure of the octonions. *J. Algebra*, 220(1) :188–224, 1999.

[AM02] Helena Albuquerque and Shahn Majid. Clifford algebras obtained by twisting of group algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 171(2-3) :133–148, 2002.

[AM04] Alejandro Adem and R. James Milgram. *Cohomology of finite groups*, volume 309 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.

[Ang00] Nicolae Anghel. Clifford matrices and a problem of Hurwitz. *Linear and Multilinear Algebra*, 47(2) :105–117, 2000.

[BE02] Georgia Benkart and Alberto Elduque. A new construction of the Kac Jordan superalgebra. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(11) :3209–3217, 2002.

[Ber69] E. R. Berlekamp. On subsets with intersections of even cardinality. *Canad. Math. Bull.*, 12 :471–474, 1969.

[BO13] Grégory Berhuy and Frédérique Oggier. *An introduction to central simple algebras and their applications to wireless communication*, volume 191 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. With a foreword by B. A. Sethuraman.

[BS94] Antal Balog and Endre Szemerédi. A statistical theorem of set addition. *Combinatorica*, 14(3) :263–268, 1994.

[BSZ01] Yu. A. Bahturin, S. K. Sehgal, and M. V. Zaicev. Group gradings on associative algebras. *J. Algebra*, 241(2) :677–698, 2001.

[BvO00] V. Bavula and F. van Oystaeyen. The simple modules of the Lie superalgebra $\mathrm{osp}(1,2)$. *J. Pure Appl. Algebra*, 150(1) :41–52, 2000.

[CM14] Tiffany Covolo and Jean-Philippe Michel. Determinants over graded-commutative algebras, a categorical viewpoint. *preprint arXiv :1403.7474*, 2014.

[Con64] S. B. Conlon. Twisted group algebras and their representations. *J. Austral. Math. Soc.*, 4 :152–173, 1964.

[COP12] Tiffany Covolo, Valentin Ovsienko, and Norbert Poncin. Higher trace and Berezinian of matrices over a Clifford algebra. *J. Geom. Phys.*, 62(11) :2294–2319, 2012.

[Cov12] Tiffany Covolo. Cohomological approach to the graded Berezinian. *preprint arXiv :1207.2962*, 2012.

[Dic89] Rainer Dick. Krichever-Novikov-like bases on punctured Riemann surfaces. *Lett. Math. Phys.*, 18(3) :255–265, 1989.

[DR09] Smarajit Das and B. Sundar Rajan. A novel construction of complex orthogonal designs with maximal rate and low-papr. *Proc. IEEE Int. Symp. Information Theory*, pages 89–93, 2009.

[DR12] Smarajit Das and B. Sundar Rajan. Low-delay, high-rate nonsquare complex orthogonal designs. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 58(5) :2633–2647, 2012.

[Eld98] Alberto Elduque. Gradings on octonions. *J. Algebra*, 207(1) :342–354, 1998.

[FW81] P. Frankl and R. M. Wilson. Intersection theorems with geometric consequences. *Combinatorica*, 1(4) :357–368, 1981.

[Gow01] W. T. Gowers. A new proof of Szemerédi's theorem. *Geom. Funct. Anal.*, 11(3) :465–588, 2001.

[GT09] Ben Green and Terence Tao. A note on the Freiman and Balog-Szemerédi-Gowers theorems in finite fields. *J. Aust. Math. Soc.*, 86(1) :61–74, 2009.

[Hur98] Adolf Hurwitz. Uber die komposition der quadratischen formen von beliebig vielen variablen. *Nahr. Ges. Wiss. Gottingen*, pages 309–316, 1898.

[Hur22] A. Hurwitz. Über die Komposition der quadratischen Formen. *Math. Ann.*, 88(1-2) :1–25, 1922.

[HWY11] Pavel Hrubeš, Avi Wigderson, and Amir Yehudayoff. Non-commutative circuits and the sum-of-squares problem. *J. Amer. Math. Soc.*, 24(3) :871–898, 2011.

[KN87a] I. M. Krichever and S. P. Novikov. Algebras of Virasoro type, Riemann surfaces and strings in Minkowski space. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 21(4) :47–61, 96, 1987.

[KN87b] I. M. Krichever and S. P. Novikov. Algebras of Virasoro type, Riemann surfaces and the structures of soliton theory. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 21(2) :46–63, 1987.

[KN89] I. M. Krichever and S. P. Novikov. Algebras of Virasoro type, the energy-momentum tensor, and operator expansions on Riemann surfaces. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 23(1) :24–40, 1989.

[Kre13] Marie Kreusch. Extensions of superalgebras of Krichever-Novikov type. *Lett. Math. Phys.*, 103(11) :1171–1189, 2013.

[Kre14] Marie Kreusch. Bott type periodicity for the higher octonions. *preprint arXiv :1405.6521*, 2014.

[LFX05] Kejie Lu, Shengli Fu, and Xiang-Gen Xia. Closed-form designs of complex orthogonal space-time block codes of rates $(k+1)/(2k)$ for $2k-1$ or $2k$ transmit antennas. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 51(12) :4340–4347, 2005.

[Lia03] Xue-Bin Liang. Orthogonal designs with maximal rates. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 49(10) :2468–2503, 2003. Special issue on space-time transmission, reception, coding and signal processing.

[LS93] T. Y. Lam and Tara L. Smith. On Yuzvinsky's monomial pairings. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 44(174) :215–237, 1993.

[McC94] Kevin McCrimmon. Kaplansky superalgebras. *J. Algebra*, 164(3) :656–694, 1994.

[Ovs11] V. Ovsienko. Lie antialgebras : prémices. *J. Algebra*, 325 :216–247, 2011.

[Rad22] J. Radon. Lineare scharen orthogonaler matrizen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1(1) :1–14, 1922.

[Raj93] A. R. Rajwade. *Squares*, volume 171 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Sch90] Martin Schlichenmaier. Krichever-Novikov algebras for more than two points. *Lett. Math. Phys.*, 19(2) :151–165, 1990.

[Set10] B. A. Sethuraman. Division algebras and wireless communication. *Notices Amer. Math. Soc.*, 57(11) :1432–1439, 2010.

[SF96] Adolfo Sánchez-Flores. A method to generate upper bounds for the sums of squares formulae problem. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 2(2) :79–92, 1996.

[Sha00] Daniel B. Shapiro. *Compositions of quadratic forms*, volume 33 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.

[TJC99] Vahid Tarokh, Hamid Jafarkhani, and A. R. Calderbank. Space-time block codes from orthogonal designs. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 45(5) :1456–1467, 1999.

[Yuz81] Sergey Yuzvinsky. Orthogonal pairings of Euclidean spaces. *Michigan Math. J.*, 28(2) :131–145, 1981.

[Yuz84] Sergey Yuzvinsky. A series of monomial pairings. *Linear and Multilinear Algebra*, 15(2) :109–119, 1984.

[Zhe09] V. N. Zhelyabin. Differential algebras and simple Jordan superalgebras. *Mat. Tr.*, 12(2) :41–51, 2009.

Travaux présentés

[1] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, S. Tabachnikov. *2-Frieze patterns and the cluster structure of the space of polygons.* Ann. Inst. Fourier **62** (2012), 937–987.

[2] S. Morier-Genoud. *Arithmetics of 2-friezes.* J. Algebraic Combin. **36** (2012), 515–539.

[3] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, R. Schwartz, S. Tabachnikov, *Linear difference equations, frieze patterns and combinatorial Gale transform*, Forum Math. Sigma 2 (2014), e22.

[4] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, S. Tabachnikov. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*-tilings of the torus, Coxeter-Conway friezes and Farey triangulations,* 2014, Ens. Math., à paraître.

[5] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Well, Papa, can you multiply triplets ?*, Math. Intell. **31** (2009), 1–2.

[6] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Simple graded commutative algebras*, J. Algebra. **323** (2010), 1649–1664.

[7] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *A series of algebras generalizing the octonions and Hurwitz-Radon identity*, Comm. Math. Phys. **306** (2011), 83–118.

[8] A. Lenzhen, S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *New solutions to the Hurwitz problem on square identities*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 2903–2911.

[9] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Orthogonal designs and a cubic binary function*, IEEE Trans. Information Theory, **59** :3 (2013) 1583–1589.

[10] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Extremal set theory, cubic forms on* $\mathbb{F}_2^n$ *and Hurwitz square identities* (avec V. Ovsienko), arXiv :1304.0949, soumis.

[11] M. Kreusch, S. Morier-Genoud, *Classification of the algebras* $\mathbb{O}_{p,q}$, 2014, Comm Alg, à paraître.

[12] S. Morier-Genoud, *Representations of* asl_2*,* Intern. Math. Res. Notices., IMRN 2009, no. 10, 1838–1859.

[13] S. Leidwanger, S. Morier-Genoud, *Universal enveloping algebras of Lie antialgebras,* Algebr. Represent. Theor. **15** (2012), no 1, 1–27.

[14] S. Leidwanger, S. Morier-Genoud, *Superalgebras associated to Riemann surfaces : Jordan algebras of Krichever-Novikov type*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), no. 19, 4449–4474.

[15] S. Leidwanger, S. Morier-Genoud, *A short survey of Lie antialgebras*, QQQ Tallinn'12 conference Proceedings, J. Phys. : Conf. Series, à paraître.