

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE  
ÉCOLE DOCTORALE BIOLOGIE, CHIMIE, SANTÉ N°619  
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE REIMS UMR 9008

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Discipline : Mathématiques Fondamentales

Présentée et soutenue publiquement par

**Ludivine LECLERE**

le 17 décembre 2024

---

### **$q$ -ANALOGUES DES NOMBRES RÉELS ET DES MATRICES UNIMODULAIRES : ASPECTS ALGÈBRIQUES, COMBINATOIRES ET ANALYTIQUES**

---

Thèse dirigée par Sophie MORIER-GENOUD

#### JURY

Directrice de thèse	Sophie MORIER-GENOUD	Université de Reims Champagne-Ardenne
Rapporteuse	Karin BAUR	Université de la Rhur à Bochum
Rapporteur	Wolfgang STEINER	Université de Paris Cité
Examineur	Nicolas JACON	Université de Reims Champagne-Ardenne
Examineur	Philippe NADEAU	Université de Lyon





# Remerciements

Je tiens à remercier en premier ma directrice de thèse Sophie Morier-Genoud, grâce à qui j'ai eu l'opportunité d'effectuer cette thèse et de m'initier au monde de la recherche. Je la remercie de tout cœur pour le temps qu'elle m'a consacrée, sa disponibilité et sa bienveillance durant ces 4 années. Effectuant ma thèse sans financement car étant professeure de mathématiques dans le second degré en parallèle, il a fallu s'adapter et s'organiser pour mener à bien ce travail. Sophie a toujours été extrêmement compréhensive et arrangeante, et pour cela, je la remercie de nouveau.

Je remercie également Valentin Ovsienko, avec qui j'ai aussi passé du temps à travailler sur ce sujet, sur lequel il avait initié les bases avec Sophie, avant de m'inclure au sein de leurs travaux.

Je vous remercie tous les deux de m'avoir permise de passer 15 jours très fructueux et riches en mathématiques au cœur de la forêt noire, à l'institut de recherches mathématiques d'Oberwolfach, ainsi qu'à Alexander Veselov pour sa collaboration et sa bonne humeur.

Je remercie également le directeur du laboratoire de mathématiques de Reims, Michael Pevzner pour son accueil au sein du département. Merci à tous les membres du LMR qui ont pour la plupart été mes professeurs durant mes études. Ils ont été pour moi, une grande source d'inspiration.

Je remercie mes collègues du bureau des doctorants avec qui j'ai pu passer de bons moments. Y compris à l'extérieur de ce bureau! Pardonne-moi Laurie pour toutes tes heures de travail perdues à m'écouter te raconter mes grandes aventures ou les derniers potins.

Je tiens évidemment à remercier ma famille. Merci à mes parents, Karine et Olivier, qui seront très émus de recevoir une petite dédicace dans cette thèse. Cette page risque de se retrouver encadrée dans un cadre sur un mur du salon (pitié non!). Merci à mon petit frère Lucas. Merci à mon conjoint Romain, pour m'avoir soutenue et motivée sur les dernières années de ma thèse.

Enfin, je tiens à remercier les meilleurs kinés de Reims : Pépé, Cam, Quentin, Clem et Valou. Merci à vous... D'être vous! Et maintenant vous savez quoi? Je vais pouvoir passer encore plus de temps au cabinet après ma soutenance de thèse, comme si je ne vous voyais déjà pas assez avant.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Organisation de la thèse . . . . .	1
1.2	Principe général et premiers exemples : $q$ -entiers et $q$ -binomiaux . . . . .	2
1.3	Motivation et précédents travaux . . . . .	4
1.4	$q$ -rationnels . . . . .	4
1.4.1	Définitions et résultats principaux . . . . .	4
1.4.2	Approche matricielle . . . . .	6
1.4.3	Continuants d'Euler . . . . .	7
1.5	$q$ -réels . . . . .	8
1.5.1	Définition et construction . . . . .	8
1.5.2	$q$ -irrationnels quadratiques . . . . .	9
1.5.3	Rayon de convergence des $q$ -réels . . . . .	10
1.6	$q$ -rationnels et interprétations combinatoires . . . . .	11
1.6.1	Interprétations dans le graphe de Farey . . . . .	11
1.6.2	Interpétation des traces des $q$ -matrices . . . . .	12
1.7	$(q, t)$ -déformation . . . . .	13
1.7.1	Construction et interprétation combinatoire des $(q, t)$ -rationnels . . . . .	13
1.7.2	Étude des traces des $(q, t)$ -matrices . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Généralités sur les rationnels</b>	<b>15</b>
2.1	Fractions continues et triangulations . . . . .	16
2.1.1	Triangulations avec deux triangles extérieurs . . . . .	16
2.1.2	Interprétation combinatoire des fractions continues . . . . .	16
2.1.3	Les sommes de Farey et l'étiquetage des sommets . . . . .	18
2.1.4	Triangulation $\mathbb{T}_{r/s}$ dans le graphe de Farey . . . . .	18
2.1.5	Orientation dans les graphes . . . . .	21
2.2	Matrices de fractions continues négatives et régulières . . . . .	22
2.2.1	Fractions continues généralisée . . . . .	22
2.2.2	Les matrices de fractions continues . . . . .	23
2.2.3	Groupe modulaire . . . . .	23
2.2.4	Matrices $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$ et $M(c_1, \dots, c_k)$ en termes de générateurs . . . . .	23
2.2.5	Conversion des matrices . . . . .	24
2.3	Continuant = "déterminant des fractions continues" . . . . .	25
2.3.1	Généralités sur les continuants . . . . .	25
2.3.2	Traces et Pfaffiens . . . . .	26
2.4	Exemples supplémentaires : Matrices de Cohn . . . . .	27
<b>3</b>	<b><math>q</math>-rationnels</b>	<b>29</b>
3.1	$q$ -fractions continues . . . . .	29
3.1.1	La définition principale . . . . .	29
3.1.2	Propriétés fondamentales des polynômes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ . . . . .	32

3.2	Matrices de fractions continues et leurs $q$ -déformations	33
3.2.1	$q$ -déformation des générateurs de $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$	34
3.2.2	$q$ -éléments du groupe modulaire	34
3.2.3	$q$ -déformation des matrices des convergents	35
3.2.4	Transformation de Möbius des $q$ -rationnels	36
3.2.5	Preuve du Théorème	36
3.3	Trace des $q$ -matrices	37
3.3.1	Preuve du Théorème	37
3.3.2	Preuve du Lemme	38
3.3.3	Preuve du Lemme	41
3.3.4	Exemples : matrices de Cohn	41
3.4	Introduction des continuants $q$ -déformés	42
3.5	Deux exemples de suites : $q$ -nombres de Fibonacci et $q$ -nombres de Pell	45
3.5.1	Suite A079487 et son miroir A123245	45
3.5.2	$q$ -déformation du rapport des nombres de Fibonacci	47
3.5.3	Une $q$ -déformation des nombres de Pell	47
<b>4</b>	<b><math>q</math>-réels</b>	<b>49</b>
4.1	Définition et théorème de stabilisation	49
4.1.1	Construction	49
4.1.2	Séries de Laurent	51
4.2	Propriétés et exemples	54
4.2.1	Fractions continues infinies	54
4.2.2	Calcul de $[e]_q$	56
4.2.3	Calcul de $[\pi]_q$	56
4.3	Étude des nombres irrationnels quadratiques	57
4.3.1	Preuve du théorème	58
4.3.2	Expressions explicites	58
4.3.3	Palindromicité de $\mathcal{P}$ (fin de la preuve du Théorème)	60
4.3.4	Exemple du nombre d'or	60
4.4	Étude des rayons de convergence des $q$ -réels	62
4.4.1	Racines des continuants	64
4.4.2	Preuve de la Proposition	66
4.4.3	Preuve de la Proposition	67
4.5	Preuve du Théorème	68
4.5.1	Cas 1-périodique	69
4.5.2	Cas 2-périodique	70
4.5.3	Cas $k$ -périodique	71
4.6	Preuve du Théorème	72
4.7	Exemples de $q$ -réels	74
4.7.1	$q$ -irrationnels quadratiques	74
4.7.2	Le nombre d'argent $q$ -déformé	77
4.7.3	Les $q$ -racines carrées de 2, 3, 5 et 7	78
4.8	Rayons de convergence particuliers	79
4.8.1	Le $q$ -nombre d'or et les racines des polynômes de Fibonacci	79
4.8.2	$[\sqrt{2}]_q$ et les racines des polynômes de Pell	81
4.8.3	Le $q$ -nombre de bronze	83
<b>5</b>	<b>Interprétations combinatoires en lien avec les <math>q</math>-rationnels</b>	<b>85</b>
5.1	Triangulations pondérées et fractions continues $q$ -déformées	85
5.1.1	Graphes de Farey pondéré	86

5.1.2	Triangulations pondérées $\mathbb{T}_{r/s}^q$ . . . . .	87
5.1.3	Étiquetage des sommets de $\mathbb{T}_{r/s}^q$ . . . . .	88
5.2	Coefficients des polynômes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ . . . . .	89
5.2.1	Interprétations énumératives des $q$ -rationnels dans le graphe de Farey . .	91
5.3	Interprétations énumératives des $q$ -continuants dans les polygones triangulés .	93
5.4	Interprétations combinatoires des coefficients des traces des $q$ -matrices . . . . .	96
5.4.1	$q$ -rotondes et triangulations d'anneaux . . . . .	96
5.4.2	Triangulations des anneaux . . . . .	96
5.4.3	Interprétation des $q$ -traces . . . . .	97
5.4.4	Preuve du Théorème . . . . .	98
<b>6</b>	<b><math>(q, t)</math>-rationnels</b> . . . . .	<b>101</b>
6.1	Interprétations combinatoires dans le graphe de Farey . . . . .	101
6.1.1	Définition et construction du graphe de Farey en $(q, t)$ . . . . .	101
6.1.2	Interprétations combinatoires . . . . .	103
6.2	Interprétation combinatoire dans les graphes en serpent . . . . .	107
6.3	Interprétation des $(q, t)$ -traces dans la triangulation des anneaux . . . . .	114
<b>A</b>	<b>Évaluations en les racines de l'unité</b> . . . . .	<b>117</b>
A.1	Pour $n = 2$ ( $q = -1$ ) . . . . .	117
A.2	Pour $n = 3$ ( $q = e^{2i\pi/3}$ ) . . . . .	118
A.3	Pour $n = 4$ ( $q = i$ ) . . . . .	119
A.4	Pour $n = 5$ ( $q = e^{2i\pi/5}$ ) . . . . .	119
A.5	Pour $n \geq 6$ . . . . .	120
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>121</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Cette thèse a pour objet d'étude les  $q$ -analogues de nombres. Les plus connus sont certainement les  $q$ -entiers, les  $q$ -factorielles et les  $q$ -coefficients binomiaux qui apparaissent fréquemment dans différents domaines de mathématique et physique, et que l'on trouve déjà dans les travaux d'Euler ( $\approx 1760$ ) et de Gauss ( $\approx 1808$ ).

Les notions de  $q$ -rationnels et  $q$ -irrationnels étudiées ici sont elles plus récentes et dues à Morier-Genoud et Ovsienko [45], [44]. Ces notions ont fait l'objet de nombreux développements ces dernières années en lien avec des sujets variés :

- combinatoire des posets [15, 16, 41, 50–52];
- invariants de noeuds et représentation du groupe de tresses [5, 32, 34, 35, 46, 62, 65];
- algèbre homologique [2, 19, 59];
- combinatoire et géométrie énumératives [20, 49, 53];
- théorie des nombres [36, 37, 54–56].

Le but de cette thèse est d'explorer de nouvelles propriétés algébriques (Chapitre 3), analytiques (Chapitre 4) et combinatoires (Chapitres 5 et 6) des  $q$ -rationnels et  $q$ -irrationnels.

### 1.1 Organisation de la thèse

Le Chapitre présente des propriétés de base sur les fractions continues et leurs interprétations combinatoires. Il ne contient pas de résultats nouveaux et reprend en grande partie l'article [43]. Seul le §, qui introduit la notion d'orientation dans les graphes, sort des résultats "classiques" et très généraux de ce chapitre.

Dans le Chapitre nous reprenons les travaux sur les  $q$ -rationnels qui ont été introduits dans [45]. Les  $q$ -rationnels sont des fractions rationnelles à coefficients entiers en  $q$  qui peuvent se calculer en utilisant des développements en fractions continues. Nous élargissons les constructions de [45] en donnant une totale liberté aux coefficients des fractions continues. Nous étudions plus spécifiquement la structure générale d'un  $q$ -rationnel. Nous reformulons la plupart des résultats énoncés de manière matricielle en considérant des  $q$ -déformations des matrices unimodulaires. Nous montrons que les traces des matrices  $q$ -déformées sont des polynômes palindromiques en  $q$ . Nous étudierons également une  $q$ -version des continuants d'Euler. Ces  $q$ -continuants se retrouveront dans les  $q$ -déformations des fractions continues mais aussi dans les entrées des  $q$ -matrices.

Dans le Chapitre nous nous intéressons aux  $q$ -réels qui ont été introduits dans [44]. Ce sont des séries de Laurent à coefficients entiers obtenus comme limites de  $q$ -rationnels. Plus particulièrement, une étude approfondie sera menée sur les  $q$ -irrationnels quadratiques. Nous montrerons d'abord que l'action de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sur la droite réelle commute avec les  $q$ -déformations. Ceci nous permettra donc d'obtenir des formules explicites pour les  $q$ -déformations des irrationnels quadratiques. Nous nous intéresserons ensuite aux séries de Laurent des  $q$ -réels en considérant  $q$  comme une variable complexe. Ainsi, se posera la question du rayon de convergence de ces séries, nous les étudierons et formulerons une conjecture leur attribuant une borne inférieure. Cette conjecture sera prouvée dans le cas des nombres rationnels et des irrationnels quadratiques sous certaines restrictions sur les coefficients dans les développements en fractions continues. En levant les restrictions nous obtiendrons une borne sur le rayon de convergence plus petite que la borne minimale conjecturale.

Le Chapitre reprend l'étude des  $q$ -rationnels sous une approche combinatoire. Le modèle principal implique le graphe de Farey et la triangulation de polygones convexes (présenté au Chapitre ). Nous commencerons par présenter la  $q$ -déformation de ces deux graphes due à [45] qui permet de retrouver, de manière récursive, les  $q$ -rationnels. Nous verrons ensuite que les coefficients des polynômes formant les  $q$ -rationnels ont des interprétations combinatoires dans le graphe de Farey, ainsi que dans la triangulation des polygones. Nous nous intéresserons par la suite aux traces des  $q$ -matrices qui sont des polynômes palindromiques en  $q$  à coefficients positifs. Nous montrerons que ces coefficients ont des interprétations combinatoires dans un modèle de triangulation d'anneau.

Dans le Chapitre nous introduisons un deuxième paramètre formel que nous notons " $t$ " afin de définir une  $(q, t)$ -déformation. Un  $(q, t)$ -rationnel sera également un quotient de polynômes, mais cette fois-ci, en deux variables formelles  $q$  et  $t$ . Dans le Chapitre nous avons présenté différentes interprétations combinatoires des  $q$ -rationnels dans plusieurs modèles (graphe de Farey, triangulation des polygones, triangulation des anneaux). L'objectif principal de ce chapitre est donc d'étudier à nouveau les interprétations combinatoires que l'on peut observer dans ces modèles, en les pondérant cette fois-ci avec les deux paramètres  $q, t$  et d'observer si l'introduction de ce deuxième paramètre nous permet d'obtenir des informations combinatoires supplémentaires. On énoncera dans un premier temps les propriétés combinatoires observées dans le graphe de Farey. Puis nous poursuivrons en introduisant un nouveau modèle combinatoire : les graphes en serpent, dans lesquels nous donnerons une interprétation combinatoire des  $(q, t)$ -rationnels. Enfin, nous terminerons ce chapitre en étudiant comme dans le Chapitre , les interprétations combinatoires des traces des  $(q, t)$ -matrices dans le modèle de la triangulation des anneaux.

Nous concluons par la partie Annexe dans laquelle nous étudierons les  $q$ -matrices évaluées en les racines de l'unité.

On présente brièvement ci-dessous les principaux résultats de la thèse. La plupart des résultats ont été publiés ([38–40]).

## 1.2 Principe général et premiers exemples : $q$ -entiers et $q$ -binomiaux

De manière générale, une  $q$ -déformation (ou  $q$ -analogue) d'un théorème ou d'une expression, consiste à "généraliser" ce dernier en faisant apparaître un paramètre " $q$ ", de telle sorte qu'en

faisant tendre  $q$  vers 1, on retrouve le théorème ou l'expression initiale. Il semble donc évident que la  $q$ -déformation d'un nombre n'est pas unique, il s'agit alors d'en trouver une qui possède des propriétés intéressantes. Les  $q$ -déformations que nous étudierons sont des fonctions en  $q$ , plus généralement des polynômes en  $q$ , ou des séries entières. Une  $q$ -déformation sera qualifiée d'intéressante si les coefficients des polynômes obtenus ont des interprétations combinatoires par exemple. En effet, dès lors qu'un objet combinatoire va effectuer un comptage, son  $q$ -analogue comptera également les mêmes choses, mais en y apportant des précisions supplémentaires.

Les entiers quantiques sont apparus dans les mathématiques bien avant que la physique quantique ne fasse ses premiers pas. Pour un entier positif  $n$ , le polynôme

$$[n]_q := 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

est communément appelé le  $q$ -analogue de  $n$ . Il satisfait deux récurrences :

$$[n + 1]_q = q [n]_q + 1, \quad [n + 1]_q = [n]_q + q^n$$

Ces deux formules peuvent être utilisées comme définition, en partant de l'hypothèse assez naturelle que  $[0]_q = 0$ . Ces formules ont été introduites par Euler.

On définit naturellement le  $q$ -analogue de la factorielle de l'entier  $n$  par  $[n]_q! := [1]_q [2]_q \dots [n]_q$ , et les coefficients  $q$ -binomiaux de Gauss par :

$$\binom{n}{m}_q := \frac{[n]_q!}{[m]_q! [n - m]_q!}.$$

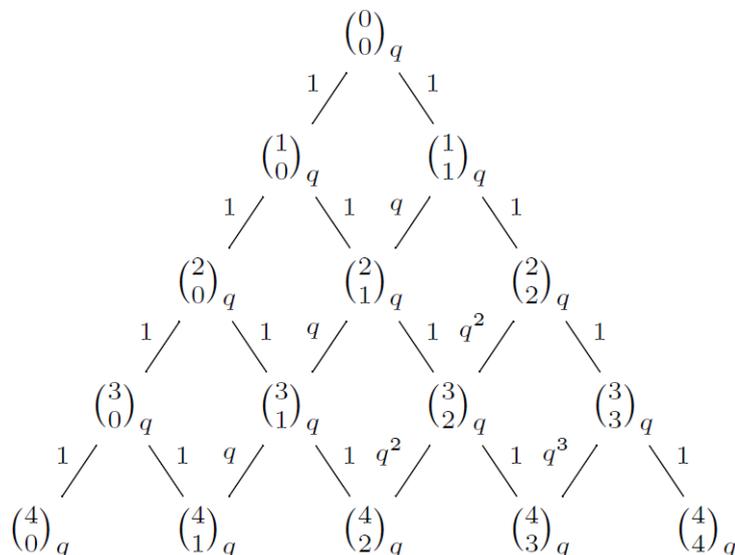
Ce sont bien des polynômes.

Le rôle des  $q$ -binomiaux en combinatoire est immense. Ils comptent les points dans les Grassmanniennes sur les corps finis, on les retrouve dans les diagrammes de Young, les mots binaires, etc. Chaque coefficient de  $\binom{n}{m}_q$  a une interprétation combinatoire.

Les coefficients  $q$ -binomiaux  $\binom{n}{m}_q$  satisfont la relation suivante

$$\binom{n}{m}_q = q^m \binom{n-1}{m}_q + \binom{n-1}{m-1}_q,$$

et peuvent être calculés de manière récurrente en utilisant le "triangle de Pascal pondéré" qui commence ainsi :



Remarquons que  $\binom{4}{2}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$  ce qui donne un  $q$ -analogue différent de  $[6]_q$ . De plus,  $[3]_q! = 1 + 2q + 2q^2 + q^3$  ce qui donne de nouveau une autre version du  $q$ -analogue de l'entier 6. Ces exemples et bien d'autres expliquent notre point de vue : nous ne pouvons pas quantifier 6, ou tout autre nombre entier individuellement. Ce que nous quantifions ne sont pas les entiers, mais des suites d'entiers.

### 1.3 Motivation et précédents travaux

Les premiers  $q$ -analogues qui ont été étudiés en détail sont les séries hypergéométriques basiques, qui ont été introduites au XIXe siècle par Harold Exton ([18]). Dans cette thèse, nous reprenons et poursuivons le travail amorcé par Sophie Morier-Genoud et Valentin Ovsienko qui a été présenté dans différents articles ([43],[45],[44]). Dans ces travaux ils ont d'abord reformulé de nombreux résultats connus sur les fractions continues en termes combinatoires. Parmi eux, le théorème de Conway et Coxeter et celui de Series, tous deux relatifs aux fractions continues et aux triangulations. Ces triangulations de polygones ont mené à la réalisation du graphe de Farey, qui sera un modèle très étudié dans le corps de cette thèse. Ils ont également introduit une notion de nombres  $q$ -rationnels et de fractions continues  $q$ -déformées. Il s'avère qu'un  $q$ -rationnel est codé par une triangulation d'un polygone et peut être calculé récursivement. Plusieurs propriétés, telles que les propriétés de positivité totale, la  $q$ -déformation du graphe de Farey, les présentations matricielles et les  $q$ -continuants sont également introduits. En étendant les  $q$ -déformations des rationnels ils ont introduit une  $q$ -déformation des nombres réels, qui sont des séries de Laurent.

Les motivations de cette thèse sont donc de centraliser les résultats obtenus dans ces différents articles et de poursuivre l'étude des  $q$ -déformations qui ont été introduites, notamment sur l'aspect combinatoire et analytique.

### 1.4 $q$ -rationnels

Il s'agit ici des principaux résultats concernant le Chapitre .

#### 1.4.1 Définitions et résultats principaux

De manière surprenante, une notion similaire aux  $q$ -entiers dans le cas des nombres rationnels n'existe pas dans la littérature. Une approche naïve pour  $q$ -déformer un nombre rationnel  $\frac{r}{s}$  serait  $\frac{[r]_q}{[s]_q}$  ou  $\frac{1-q^{\frac{r}{s}}}{1-q}$  (même expression à un changement de variable près). Cependant dans ces formules, le numérateur et le dénominateur sont  $q$ -déformés séparément en tant que  $q$ -entiers, et de telles définitions ne satisfont pas des propriétés combinatoires intéressantes. Nous introduisons donc la  $q$ -déformation d'un nombre rationnel en utilisant les développements en fractions continues que nous rappelons ci-dessous.

Soit  $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ , on suppose que  $r$  et  $s$  sont des entiers positifs premiers entre eux. Rappelons qu'un rationnel possède deux développements en fractions continues

$$\frac{r}{s} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{2m}}}} = c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{c_k}}}$$

où  $a_1, c_1 \in \mathbb{Z}$  et  $a_i \geq 1, c_i \geq 2$  pour tout  $i \geq 2$ .

Nous noterons respectivement  $[a_1, \dots, a_{2m}]$  le développement en fraction continue *régulière* (membre du milieu), et  $\llbracket c_1, c_2, \dots, c_k \rrbracket$  le développement en fraction continue *d'Hirzebruch-Jung*, que l'on appelle parfois développement en fraction continue *négatif* (membre de droite).

Nous introduisons maintenant les  $q$ -analogues de ces deux développements en fractions continues avec lesquels nous travaillerons dans cette thèse.

**Définition** ([45]). (a) Étant donnée une fraction continue régulière  $[a_1, \dots, a_{2m}]$ , sa  $q$ -déformation est donnée par

$$[a_1, \dots, a_{2m}]_q := [a_1]_q + \frac{q^{a_1}}{[a_2]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_2}}{[a_3]_q + \frac{q^{a_3}}{[a_4]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_4}}{\ddots}}}}.$$

(b) Étant donnée une fraction continue négative  $\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$ , sa  $q$ -déformation est donnée par

$$\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket_q := [c_1]_q - \frac{q^{c_1-1}}{[c_2]_q - \frac{q^{c_2-1}}{\ddots}}.$$

Le théorème principal concernant les  $q$ -analogues des développements en fractions continues sera démontré dans la Section . Voici son énoncé.

**Théorème** ([38]). *Pour tout  $a_i, c_i \in \mathbb{Z}$ , si une fraction continue régulière  $[a_1, \dots, a_{2m}]$  et une fraction continue négative  $\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$  représentent le même nombre rationnel alors leurs  $q$ -déformations coïncident :*

$$[a_1, \dots, a_{2m}]_q = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket_q.$$

Ce théorème élargit le résultat de [45, Theorem 1] à tous coefficients entiers.

Le  $q$ -analogue du rationnel  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2m}] = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$  est ainsi donnée par

$$\left[ \frac{r}{s} \right]_q = [a_1, \dots, a_{2m}]_q = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket_q.$$

Nous obtenons par exemple les  $q$ -analogues suivants :

$$\left[ \frac{5}{2} \right]_q = \frac{1 + 2q + q^2 + q^3}{1 + q} \quad \text{et} \quad \left[ \frac{5}{3} \right]_q = \frac{1 + q + 2q^2 + q^3}{1 + q + q^2}.$$

On remarque que les  $q$ -analogues du 5 obtenus dans les numérateurs sont différents selon les fractions.

Nous donnons en Proposition les propriétés des polynômes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  apparaissant au numérateur et dénominateur de  $\left[ \frac{r}{s} \right]_q$ .

### 1.4.2 Approche matricielle

Il est commun de représenter les fractions continues par des matrices unimodulaires  $2 \times 2$  à coefficients entiers. Nous développons donc une technique similaire dans le cas  $q$ -déformé. Ainsi, les résultats qui ont été formulés avec les  $q$ -fractions continues se reformulent de manière matricielle.

Rappelons que le groupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  est engendré par les matrices

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$  et son groupe d'unités  $U := \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]^\times = \{\pm q^N, N \in \mathbb{Z}\}$ . Nous considérons les groupes suivants de  $2 \times 2$ -matrices

$$GL(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A, B, C, D \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] : AD - BC \in U \right\},$$

$$PGL(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]) = GL(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]) / U.$$

Nous considérons dans  $PGL(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}])$  les matrices suivantes

$$R_q := \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_q := \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont des  $q$ -analogues de  $R$  et  $S$  et satisfont  $(R_q S_q)^3 = -\text{Id}$ ,  $S_q^2 = -q^{-1} \text{Id}$ .

On considère le sous-groupe engendré par les classes de  $R_q$  et  $S_q$  à l'intérieur de  $PGL(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}])$ . On définit

$$\text{PSL}_q(2, \mathbb{Z}) := \langle R_q, S_q \rangle \subset PGL(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]).$$

**Proposition** ([38]). *L'application*

$$\begin{aligned} [\cdot]_q : R &\mapsto [R]_q = R_q \\ &S \mapsto [S]_q = S_q \end{aligned}$$

*réalise un isomorphisme entre  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et  $\text{PSL}_q(2, \mathbb{Z})$ .*

Grâce à cet isomorphisme, nous pouvons définir des  $q$ -déformations pour toute matrice de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Notre résultat principal sur les matrices  $q$ -déformées est le suivant.

**Théorème** ([38]). *Les traces des éléments dans  $\text{PSL}_q(2, \mathbb{Z})$  sont des polynômes palindromes dans  $\mathbb{Z}[q]$  à coefficients entiers positifs, modulo un facteur multiplicatif  $\pm q^N$ .*

Nous utiliserons souvent les matrices  $q$ -déformées associées aux fractions continues :

$$M_q(c_1, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} [c_1]_q & -q^{c_1-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [c_2]_q & -q^{c_2-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} [c_k]_q & -q^{c_k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M_q^+(a_1, \dots, a_{2m}) = q^{\sum a_{2i}} \begin{pmatrix} [a_1]_q & q^{a_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_2]_{q^{-1}} & q^{-a_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} [a_{2m-1}]_q & q^{a_{2m-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_{2m}]_{q^{-1}} & q^{-a_{2m}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 1.4.3 Continuant d'Euler

Les continuants sont des déterminants de matrices tridiagonales. Ils ont une longue histoire qui remonte aux travaux d'Euler sur les fractions continues [17, Chap. 18], voir aussi [48], [57], [24]. Le nom, issu de la fusion de "fraction continue" et de "déterminant", a été introduit par Thomas Muir au milieu du 19ème siècle [47].

La théorie des  $q$ -rationnels fournit des  $q$ -analogues des continuants. Nous introduisons les notations suivantes.

$$E_k(c_1, \dots, c_k)_q := \begin{vmatrix} [c_1]_q & q^{c_1-1} & & & \\ & 1 & [c_2]_q & q^{c_2-1} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & [c_{k-1}]_q & q^{c_{k-1}-1} \\ & & & & 1 & [c_k]_q \end{vmatrix}$$

et

$$K_n(a_1, \dots, a_n)_q := q^{\sum_i a_{2i}-1} \begin{vmatrix} [a_1]_q & q^{a_1} & & & & \\ & -1 & [a_2]_{q^{-1}} & q^{-a_2} & & \\ & & -1 & [a_3]_q & q^{a_3} & \\ & & & -1 & [a_4]_{q^{-1}} & q^{-a_4} \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & -1 & [a_n]_{q^{-1}} \end{vmatrix}$$

où  $n$  est pair,  $c_i$  et  $a_i$  sont des entiers positifs.

Nous devons également considérer le continuant  $K$  sur un nombre impair de variables. Nous notons pour  $n$  un entier pair.

$$K_{n-1}(a_2, \dots, a_n)_q := q^{\sum_i a_{2i}-1} \begin{vmatrix} [a_2]_{q^{-1}} & q^{-a_2} & & & & \\ & -1 & [a_3]_q & q^{a_3} & & \\ & & -1 & [a_4]_{q^{-1}} & q^{-a_4} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & [a_{n-1}]_q & q^{a_{n-1}} \\ & & & & & -1 & [a_n]_{q^{-1}} \end{vmatrix}.$$

Pour ces  $q$ -continuants, nous prenons les conventions suivantes :  $K_{-1}()_q = E_{-1}()_q = 0$  et  $K_0()_q = E_0()_q = 1$ .

Nous donnons également les  $q$ -analogues des formules qui lient les fractions continues aux continuants.

**Proposition** ([, \[39\]](#)). Soient  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(c_1, \dots, c_k)$  des uplets d'entiers positifs, on a

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]_q = [a_1]_q + \frac{q^{a_1}}{[a_2]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_2}}{[a_3]_q + \frac{q^{a_3}}{[a_4]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_4}}{\ddots + \frac{q^{\pm 1}}{[a_n]_q}}}}} = \frac{K_n(a_1, \dots, a_n)_q}{K_{n-1}(a_2, \dots, a_n)_q}$$

$$[[c_1, c_2, \dots, c_k]]_q = [c_1]_q - \frac{q^{c_1-1}}{[c_2]_q - \frac{q^{c_2-1}}{\ddots - \frac{q^{c_{k-1}-1}}{[c_k]_q}}} = \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)_q}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q}.$$

Enfin, nous savons que les continuants apparaissent dans les entrées des matrices des convergents, nous donnons également un  $q$ -analogue de ces résultats. Il s'agit de la proposition suivante.

**Proposition** ([, \[39\]](#)). (i) Soit  $(c_1, \dots, c_k)$  des entiers positifs. On a

$$M_q(c_1, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} E_k(c_1, \dots, c_k)_q & -q^{c_k-1} E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q \\ E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q & -q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q \end{pmatrix}.$$

(ii) Soit  $(a_1, \dots, a_{2m})$  des entiers positifs. On a

$$M_q^+(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} qK_n(a_1, \dots, a_n)_q & \widetilde{K}_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})_q \\ qK_{n-1}(a_2, \dots, a_n)_q & \widetilde{K}_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1})_q \end{pmatrix}$$

où la notation  $\widetilde{K}$  représente le polynôme miroir, c'est-à-dire celui avec la suite inversée de coefficients.

## 1.5 $q$ -réels

Il s'agit ici des principaux résultats concernant le Chapitre .

### 1.5.1 Définition et construction

Les  $q$ -réels ont été introduits dans [\[44\]](#). Dans cette thèse nous élargissons les constructions de [\[44\]](#) restreintes aux réels supérieurs à 1 à tout nombre réel.

Pour cela, nous avons besoin de considérer l'anneau suivant :

$$\mathbb{Z}[[q]][q^{-1}] = \left\{ \sum_{k=N}^{+\infty} \alpha_k q^k ; N \in \mathbb{Z}, \alpha_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

En effet, il s'avère que les  $q$ -réels sont des éléments de cet anneau, que l'on appelle des *séries de Laurent*. On munira cet anneau de sa topologie usuelle classique, ce qui nous permettra d'étudier la convergence de suites d'éléments de cet anneau.

Le résultat fondamental suivant permet de bien définir les  $q$ -réels.

**Proposition** (, [44], [38]). *Pour tout nombre irrationnel  $x \in \mathbb{R}$  et toute suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de nombres rationnels qui converge vers  $x$ , la suite de  $q$ -rationnels  $([x_n]_q)_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{Z}[[q]][[q^{-1}]]$ . De plus la série limite  $[x]_q := \lim_{n \rightarrow +\infty} [x_n]_q$  ne dépend que de  $x$ .*

Il s'avère qu'avec cette construction, nous pouvons prouver que l'action de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sur la droite réelle commute avec les  $q$ -déformations comme l'indique le théorème ci-dessous.

**Théorème** (, [38]). *Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les  $q$ -déformations satisfont*

$$\begin{aligned} [x+1]_q &= q[x]_q + 1, \\ \left[-\frac{1}{x}\right]_q &= -\frac{1}{q[x]_q}. \end{aligned}$$

### 1.5.2 $q$ -irrationnels quadratiques

Nous approfondissons nos recherches sur une catégorie de nombres réels plus particuliers : les irrationnels quadratiques (voir la Section ).

Un nombre irrationnel quadratique réel est un nombre réel  $x$  de la forme  $x = \frac{r \pm \sqrt{p}}{s}$ , avec  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $s, p \in \mathbb{Z}_{>0}$  et  $p$  n'est pas un carré dans  $\mathbb{Z}_{>0}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $x$  est un nombre irrationnel quadratique réel ;
- (b)  $x$  est une solution d'une équation  $aX^2 + bX + c = 0$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  et  $b^2 - 4ac > 0$  n'étant pas un carré ;
- (c) Il existe  $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ , avec  $\mathrm{Tr} M > 2$ , tel que  $M \cdot x = x$  ;
- (d) Le développement de  $x$  en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang [Théorème de Lagrange].

Ces assertions sont des résultats classiques et bien connus sur les nombres irrationnels quadratiques. Notre objectif principal ici sera alors de démontrer une  $q$ -version de ces assertions comme l'indique le théorème suivant.

**Théorème** (, [38]). *Soit  $x = \frac{r \pm \sqrt{p}}{s}$  un nombre irrationnel quadratique. Sa  $q$ -déformation  $[x]_q$  satisfait les assertions suivantes :*

- (i)  $[x]_q = \frac{\mathcal{R} \pm \sqrt{\mathcal{P}}}{\mathcal{S}}$ , avec  $\mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{S} \in \mathbb{Z}[q]$ , et  $\mathcal{P}$  un palindrome ;
- (ii)  $[x]_q$  est solution de l'équation  $\mathcal{A}X^2 + \mathcal{B}X + \mathcal{C} = 0$ , avec  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{Z}[q]$  ;
- (iii) il existe une matrice  $M_q \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}])$  telle que  $M_q \cdot [x]_q = [x]_q$  ;
- (iv)  $[x]_q$  a un développement infini en fraction continue.

Nous obtenons donc des expressions explicites concernant les  $q$ -irrationnels quadratiques (voir §), voici leur structure générale.

**Proposition** (, [38]). *Si  $x$  est un point fixe de la matrice  $M(c_1, \dots, c_k)$ , alors sa  $q$ -déformation  $[x]_q$  a la forme suivante*

$$[x]_q = \frac{\mathcal{R} \pm \sqrt{\mathcal{P}}}{\mathcal{S}},$$

où  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont des polynômes dans  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  donnés par les  $q$ -continuants

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (\mathrm{Tr} M_q(c_1, \dots, c_k))^2 - 4q \sum_{i=1}^k (c_i - 1) \\ \mathcal{R} &= E_k(c_1, \dots, c_k)_q + q^{c_k - 1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q \\ \mathcal{S} &= 2E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q \end{aligned}$$

### 1.5.3 Rayon de convergence des $q$ -réels

Comme nous étudions des séries de Laurent, il semble naturel d'étudier les rayons de convergence, en considérant dans ces séries  $q$  comme variable complexe.

En particulier, nous montrerons dans le § que le rayon de convergence correspondant au nombre d'or vaut

$$R_\star := R(\varphi) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.381966\dots$$

Notre travail a été établi autour de la conjecture suivante, qui peut être considérée comme un analogue possible de la théorie d'approximation de Hurwitz.

**Conjecture** (, [40]). *Pour tout réel  $x > 0$  le rayon de convergence  $R(x)$  des séries  $[x]_q$  satisfait l'inégalité  $R(x) \geq R_\star$  et l'égalité est vérifiée uniquement pour les  $x$  qui sont  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -équivalents à  $\varphi$ .*

Les résultats que nous avons réussi à démontrer (moins généraux que la conjecture en elle-même) sont les suivants.

**Théorème** (, [40]). *Pour tout nombre rationnel  $x > 0$  le rayon de convergence  $R(x)$  de la série  $[x]_q$  a la borne inférieure suivante*

$$R(x) > 3 - 2\sqrt{2} = 0.171572\dots$$

**Théorème** (, [40]). *Si tous les coefficients  $c_i$  du développement en fraction continue négative d'un nombre rationnel  $x = \llbracket c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \rrbracket$  sont supérieurs ou égaux à 4, alors le rayon de convergence de  $[x]_q$  est supérieur ou égal à  $R_\star$ .*

**Théorème** (). *Si  $x > 0$  est un nombre irrationnel quadratique de la forme  $x = \llbracket b_1, \dots, b_l, \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$ , alors  $R(x) \geq R_2$ .*

**Théorème** (). *Si  $x > 0$  est un nombre irrationnel quadratique de la forme  $x = \llbracket b_1, \dots, b_l, \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$  avec  $c_i \geq 4$ , alors  $R(x) \geq R_\star$ .*

Nous avons réussi à améliorer ces résultats sur des  $q$ -réels bien particuliers, notamment le  $q$ -nombre d'or avec les polynômes de Fibonacci (voir §) et le  $q$ -nombre d'argent avec les polynômes de Pell (voir le §) comme l'indiquent les théorèmes suivants.

**Théorème** (, [40]). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les racines des polynômes de Fibonacci  $\mathcal{F}_n(q)$  et  $\tilde{\mathcal{F}}_n(q)$  appartiennent à l'anneau*

$$R_0 < |q| < R_0^{-1}.$$

**Théorème** (, [40]). *Les racines des polynômes de Pell  $\mathcal{P}_n(q)$  et  $\tilde{\mathcal{P}}_n(q)$  appartiennent à l'anneau*

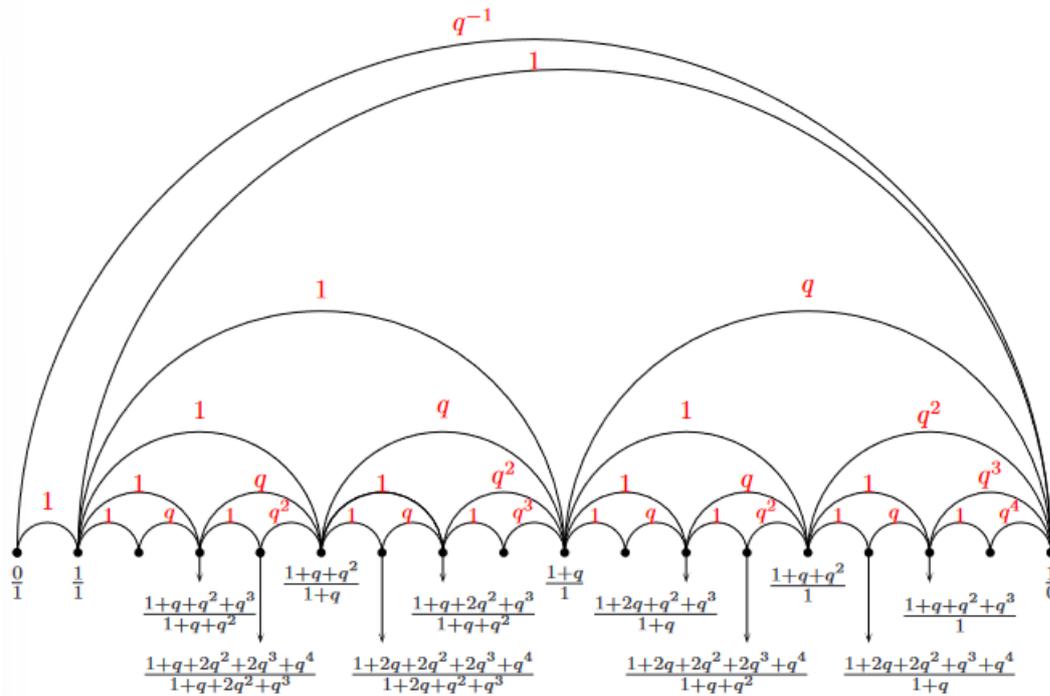
$$R_1 < |q| < R_1^{-1}.$$

## 1.6 $q$ -rationnels et interprétations combinatoires

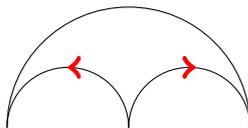
Il s'agit ici des principaux résultats concernant le Chapitre .

### 1.6.1 Interprétations dans le graphe de Farey

Le graphe de Farey pondéré a été défini dans [45]. La partie supérieure du graphe de Farey pondéré est représentée sur la Figure présentée ci-dessous.



En ajoutant l'orientation suivante sur chaque arête :



nous pouvons donner des interprétations combinatoires à l'aide de chemin dans le graphe.

**Théorème** ([39]). Soit  $\frac{r}{s}$  un rationnel supérieur à 1 et soit  $\mathcal{R} = \left[ \frac{r}{s} \right]_q$  sa  $q$ -déformation. On a

$$\mathcal{R} = \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{0}} \text{wt}(\pi),$$

$$\mathcal{S} = \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{1}} \text{wt}(\pi).$$

où  $\text{wt}(\pi)$  représente le poids du chemin  $\pi$ .

**Théorème** ([39]). Soit  $\frac{r}{s}$  un rationnel supérieur à 1 et soit  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = [\frac{r}{s}]_q$  sa  $q$ -déformation. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{0}} q^{\text{coar}(\pi)}, \\ \mathcal{S} &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{1}} q^{\text{coar}(\pi)}. \end{aligned}$$

où  $\text{coar}(\pi)$  représente le nombre de triangles compris entre le chemin  $\pi$  et le bord gauche du graphe.

Ces résultats se reformulent également en terme de triangulations de polygones convexes §.

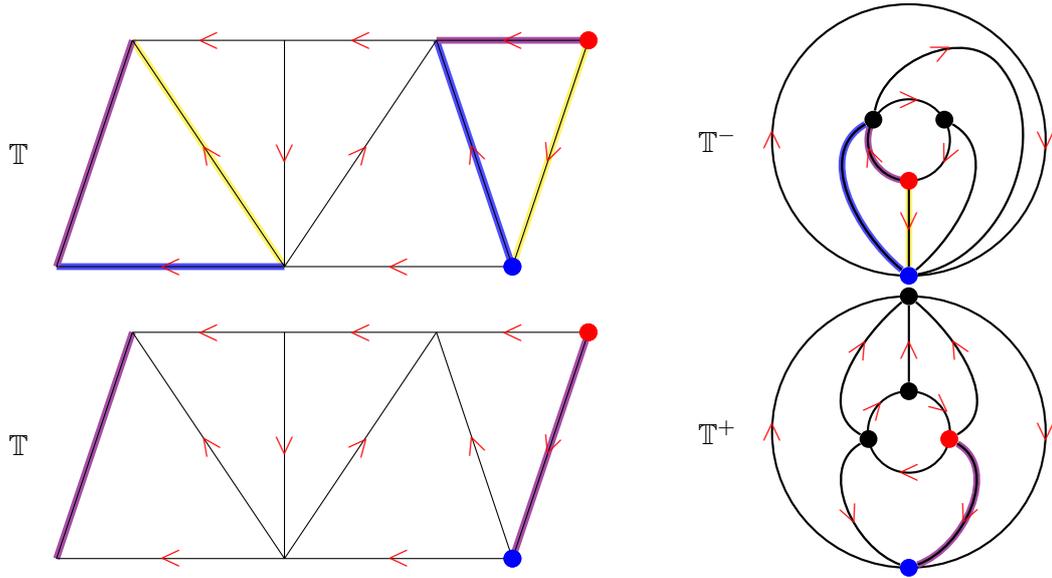
### 1.6.2 Interprétation des traces des $q$ -matrices

Nous nous intéresserons également aux interprétations combinatoires des traces des  $q$ -matrices.

Pour le modèle combinatoire nous utiliserons des *triangulations d'anneaux* obtenues en refermant les triangulations de polygones convexes §.

Voici un exemple visuel d'une telle triangulation.

**Exemple** (). Pour la suite  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m}) = (1, 2, 1, 1)$  et  $(c_1, \dots, c_k) = (2, 2, 3)$  on obtient les triangulations des anneaux suivantes



Notre résultat combinatoire est le théorème ci-dessous.

**Théorème** (). Soit  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  une suite d'entiers positifs et soit  $(c_1, \dots, c_k)$  une suite d'entiers supérieurs à 1. On a

$$\begin{aligned} (i) \quad \text{Tr } M_q^+(a_1, \dots, a_{2m}) &= \sum_{\gamma \text{ dans } \mathbb{T}^+} q^{\text{ar}(\gamma)} = \sum_{\gamma \text{ dans } \mathbb{T}^+} q^{\text{coar}(\gamma)}, \\ (ii) \quad \text{Tr } M_q(c_1, \dots, c_k) &= \sum_{\gamma \text{ dans } \mathbb{T}^-} q^{\text{ar}(\gamma)} = \sum_{\gamma \text{ dans } \mathbb{T}^-} q^{\text{coar}(\gamma)}, \end{aligned}$$

où la somme porte sur toutes les courbes fermées dans les triangulations  $\mathbb{T}^+ = \mathbb{T}^+(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  et  $\mathbb{T}^- = \mathbb{T}^-(c_1, \dots, c_k)$ , respectivement.

## 1.7 $(q, t)$ -déformation

Il s'agit ici des principaux résultats concernant le Chapitre .

### 1.7.1 Construction et interprétation combinatoire des $(q, t)$ -rationnels

Nous introduisons ici un deuxième paramètre que l'on nomme  $t$  (indépendant de  $q$ ) afin de définir une  $(q, t)$ -déformation dans laquelle nous irons chercher des propriétés combinatoires intéressantes.

**Définition ()**. Pour tout  $a_i, c_i \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\begin{aligned} M_{q,t}(a_1, \dots, a_{2m}) &:= \begin{pmatrix} [a_1]_q & q^{a_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_2]_t & t^{a_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} [a_{2m-1}]_q & q^{a_{2m-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_{2m}]_t & t^{a_{2m}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R} & t^{a_{2m}} \mathcal{R}' \\ \mathcal{S} & t^{a_{2m}} \mathcal{S}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = [a_1, \dots, a_{2m}]_{q,t}$  et  $\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'} = [a_1, \dots, a_{2m-1}]_{q,t}$ .

Dans le § nous définissons le graphe de Farey pondéré en  $(q, t)$  dans lequel nous obtenons des propriétés combinatoires intéressantes. Il s'avère qu'en rajoutant ce deuxième paramètre  $t$ , nous obtenons des informations supplémentaires dans le comptage.

**Théorème ()**. Soit  $\frac{r}{s}$  un rationnel supérieur à 1 et soit  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = [\frac{r}{s}]_{q,t}$  sa  $(q, t)$ -déformation. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{0}} \text{wt}(\pi), \\ \mathcal{S} &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{1}} \text{wt}(\pi). \end{aligned}$$

**Théorème ()**. Soit  $\frac{r}{s}$  un rationnel supérieur à 1 et soit  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = [\frac{r}{s}]_{q,t}$  sa  $(q, t)$ -déformation. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{0}} q^{d(\pi)} t^{g(\pi)}, \\ \mathcal{S} &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{1}} q^{pd(\pi)} t^{pg(\pi)}. \end{aligned}$$

Nous introduisons spécifiquement pour la  $(q, t)$ -déformation le modèle combinatoire des graphes en serpent colorés avec des boîtes noires et des boîtes blanches (voir le § pour les détails). Grâce à celui-ci nous obtenons le théorème combinatoire suivant.

**Théorème ()**. Soit  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2n}]$  un rationnel supérieur à 1 et soit  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = [\frac{r}{s}]_{q,t}$  sa  $(q, t)$ -déformation. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sum_{\pi: D \rightarrow A} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)}, \\ \mathcal{S} &= \sum_{\pi: D_r \rightarrow A} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)}. \end{aligned}$$

où  $ar_{\blacksquare}(\pi)$  (resp  $ar_{\square}(\pi)$ ) représente le nombre de boîtes noires (resp boîtes blanches) capturées entre le chemin  $\pi$  et la diagonale.

### 1.7.2 Étude des traces des $(q, t)$ -matrices

Nous utilisons de nouveau le modèle de la triangulation des anneaux pour obtenir des résultats combinatoires sur les traces des  $(q, t)$ -matrices. Nous obtenons le théorème suivant comme résultat principal de cette étude.

**Théorème ()**. *On obtient les  $(q, t)$ -traces en comptant le nombre de triangles capturés entre la diagonale et les chemins. Si un triangle est capturé est à l'intérieur de la diagonale il compte pour  $t$ . Sinon il compte pour  $q$ .*

## Chapitre 2

# Généralités sur les rationnels

Ce chapitre présente des propriétés de base sur les fractions continues et leurs interprétations combinatoires. Il ne contient pas de résultats nouveaux et reprend en grande partie l'exposition de [43]. Seul le §, qui introduit la notion d'orientation dans les graphes, sort des résultats "classiques" et très généraux de ce chapitre.

Commençons par rappeler qu'un nombre rationnel admet des décompositions en fractions continues, que l'on peut présenter de la façon suivante.

Soient  $r$  et  $s$  deux entiers relatifs premiers entre eux. Le nombre rationnel  $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$  admet des développements uniques de la forme :

$$\frac{r}{s} = c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{c_k}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{2m}}}}, \quad (2.1)$$

où  $a_1, c_1 \in \mathbb{Z}$  et  $c_i \geq 2$  et  $a_i \geq 1$ , pour tout  $i \geq 2$ .

Le premier développement est généralement appelé *fraction continue négative* ou d'*Hirzebruch-Jung*, le second est une *fraction continue régulière*.

Nous utiliserons les notations standards  $\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$  et  $[a_1, \dots, a_{2m}]$  pour désigner les fractions continues négatives et régulières ci-dessus, respectivement. Notons que l'on peut toujours supposer que le nombre de termes de la fraction continue régulière est pair, puisque  $[a_1, \dots, a_\ell + 1] = [a_1, \dots, a_\ell, 1]$ .

Nous serons souvent amené à considérer les décompositions de nombres rationnels supérieurs à 1, dans ce cas nous aurons aussi la condition  $a_1 \geq 1$  et  $c_1 \geq 2$ . Nous serons également amené à considérer les décompositions sans restrictions sur les coefficients entiers  $a_i$  et  $c_i$ .

La formule explicite qui permet de convertir les fractions continues régulières et négatives (2.1) est la suivante :

$$(c_1, \dots, c_k) = (a_1 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2-1}, a_3 + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_4-1}, \dots, a_{2m-1} + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{2m}-1}). \quad (2.2)$$

Cette expression se trouve dans [29] et [28], voir aussi [7], p.93. Une explication combinatoire de cette formule sera donnée ci-après au §.

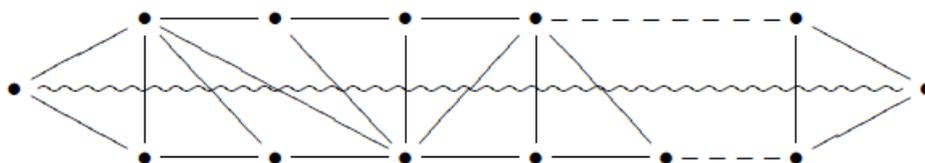
## 2.1 Fractions continues et triangulations

Le but de la première section de ce chapitre est de rappeler que les fractions continues régulières et négatives peuvent être codées par le même modèle combinatoire simple. Tous les énoncés de cette section sont des reformulations combinatoires de résultats connus.

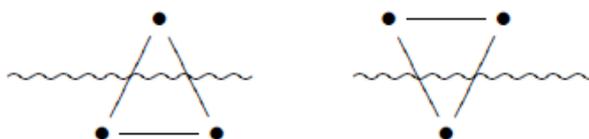
### 2.1.1 Triangulations avec deux triangles extérieurs

Étant donné un  $n$ -gone (convexe), nous considérerons la notion classique de *triangulation* qui est une dissection maximale du  $n$ -gone par des diagonales qui ne se croisent jamais sauf aux extrémités. Un triangle d'une triangulation est dit *extérieur* si deux de ses côtés sont aussi des côtés (et non des diagonales) du  $n$ -gone.

Dans cette section, nous ne considérons que les triangulations qui ont exactement deux triangles extérieurs. Dans une telle triangulation la diagonale reliant les sommets extérieurs des triangles extérieurs a la propriété de traverser toutes les diagonales de la triangulation :

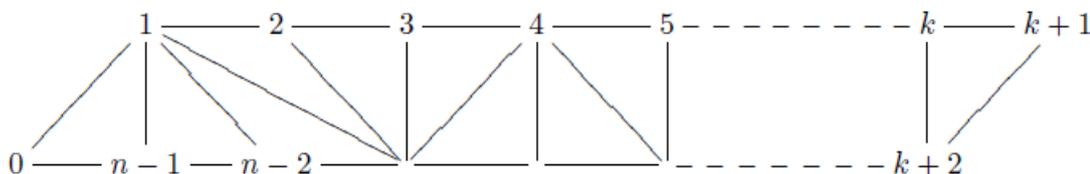


Ensuite, chaque triangle de la triangulation (à l'exception des triangles extérieurs) peut être situé par rapport à cette diagonale de l'une des deux façons possibles :



que nous appelons "base en bas" ou "base en haut". Nous supposons que le premier triangle extérieur est situé base en bas, et le dernier base en haut.

Nous numérotons les sommets de  $0$  à  $n - 1$  dans un ordre cyclique (dans le sens des aiguilles d'une montre) :

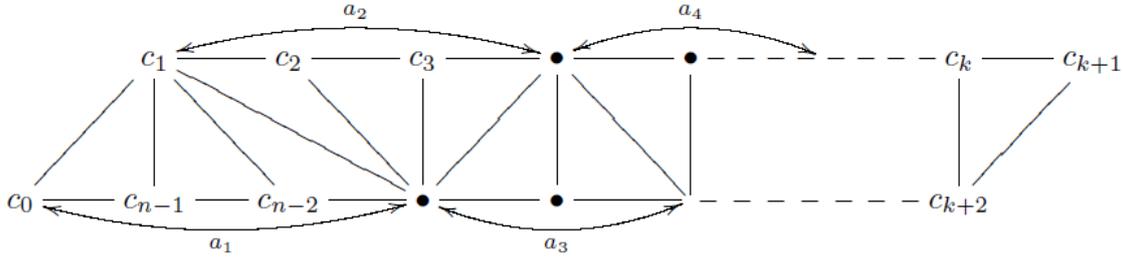


de sorte que les sommets extérieurs soient  $0$  et  $k + 1$ .

### 2.1.2 Interprétation combinatoire des fractions continues

Étant donné un  $n$ -gone et sa triangulation avec deux triangles extérieurs, nous associons deux suites d'entiers définies comme suit.

1. Les entiers  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  comptent le nombre de triangles positionnés dans le même sens, c'est-à-dire que la triangulation consiste en la concaténation de  $a_1$  triangles base en bas, suivis de  $a_2$  triangles base en haut et ainsi de suite :



2. Les nombres entiers  $(c_1, c_2, \dots, c_n = c_0)$  comptent le nombre de triangles à chaque sommet, c'est-à-dire que l'entier  $c_i$  est le nombre de triangles incidents au sommet  $i$ .

La formule (2.2) est équivalente au fait que ces suites définissent le même nombre rationnel.

**Proposition 2.1.1** ([43]). *Si  $(a_1, \dots, a_{2m})$  et  $(c_1, \dots, c_k)$  sont les entiers définis par les points 1. et 2. ci-dessus respectivement, alors ce sont les coefficients des développements du même nombre rationnel sous forme de fractions continues régulières et négatives, c'est-à-dire,*

$$[a_1, \dots, a_{2m}] = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket.$$

Pour une preuve, voir Section .

Il est clair que chacune des données  $(a_1, \dots, a_{2m})$  et  $(c_1, \dots, c_k)$  définissent de façon unique la (même) triangulation d'un polygone avec deux triangles extérieurs. Le nombre  $n$  de sommets est lié aux suites via

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2m} = n - 2, \quad c_1 + c_2 + \dots + c_k = n + k - 3.$$

La Proposition implique alors ce qui suit.

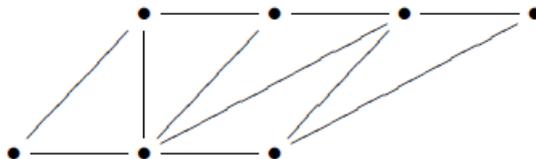
**Corollaire 2.1.2** ([43]). *L'ensemble des rationnels  $\frac{r}{s} > 1$  est en bijection avec les triangulations de polygones avec deux triangles extérieurs.*

**Définition 2.1.3.** *Étant donné un nombre rationnel  $\frac{r}{s} > 1$ , on désigne par  $\mathbb{T}_{r/s}$  la triangulation correspondante avec deux triangles extérieurs.*

**Exemple 2.1.4.** On a

$$\frac{7}{5} = [1, 2, 1, 1] = \llbracket 2, 2, 3 \rrbracket.$$

La triangulation correspondante  $\mathbb{T}_{7/5}$  est



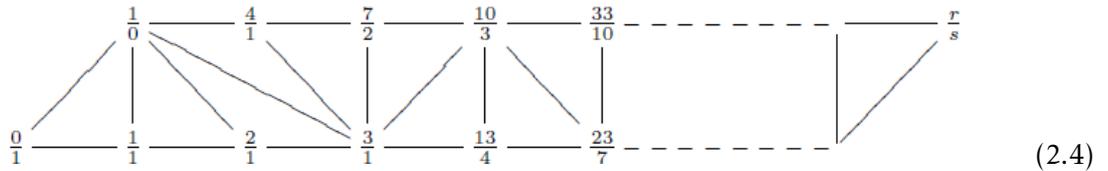
### 2.1.3 Les sommes de Farey et l'étiquetage des sommets

Le rationnel  $\frac{r}{s}$  peut être retrouvé à partir de la triangulation  $\mathbb{T}_{r/s}$  par une règle additive.

Étiquetons les sommets du  $n$ -gone par des rationnels. Nous partons de  $\frac{0}{1}$  et  $\frac{1}{0}$  aux sommets 0 et 1, respectivement. Nous étendons ensuite ce marquage à l'ensemble du  $n$ -gone par la "formule de sommation de Farey" suivante : lorsque les rationnels ont été attribués à deux sommets d'un même triangle  $\frac{r'}{s'}$  et  $\frac{r''}{s''}$ , alors le troisième sommet reçoit l'étiquette

$$\frac{r'}{s'} \oplus \frac{r''}{s''} := \frac{r' + r''}{s' + s''}. \quad (2.3)$$

Ce processus est illustré par l'exemple suivant.



La proposition suivante est facilement prouvée par récurrence. Elle peut être considérée comme une reformulation du résultat de Series [61]; pour plus de détails, voir la Section .

**Proposition 2.1.5** ([43]). *En étiquetant les sommets de la triangulation  $\mathbb{T}_{r/s}$  selon la règle ci-dessus, le sommet  $k + 1$  reçoit l'étiquette  $\frac{r}{s}$ .*

**Remarque 2.1.6.** Plus généralement, le rationnel étiquetant le sommet numéro  $i$ , pour  $2 \leq i \leq k$  est le  $i$ ème convergent de la fraction négative  $\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$ , i.e. le rationnel  $\llbracket c_1, \dots, c_i \rrbracket$ .

### 2.1.4 Triangulation $\mathbb{T}_{r/s}$ dans le graphe de Farey

La triangulation (2.4) peut être naturellement intégrée dans le graphe de Farey.

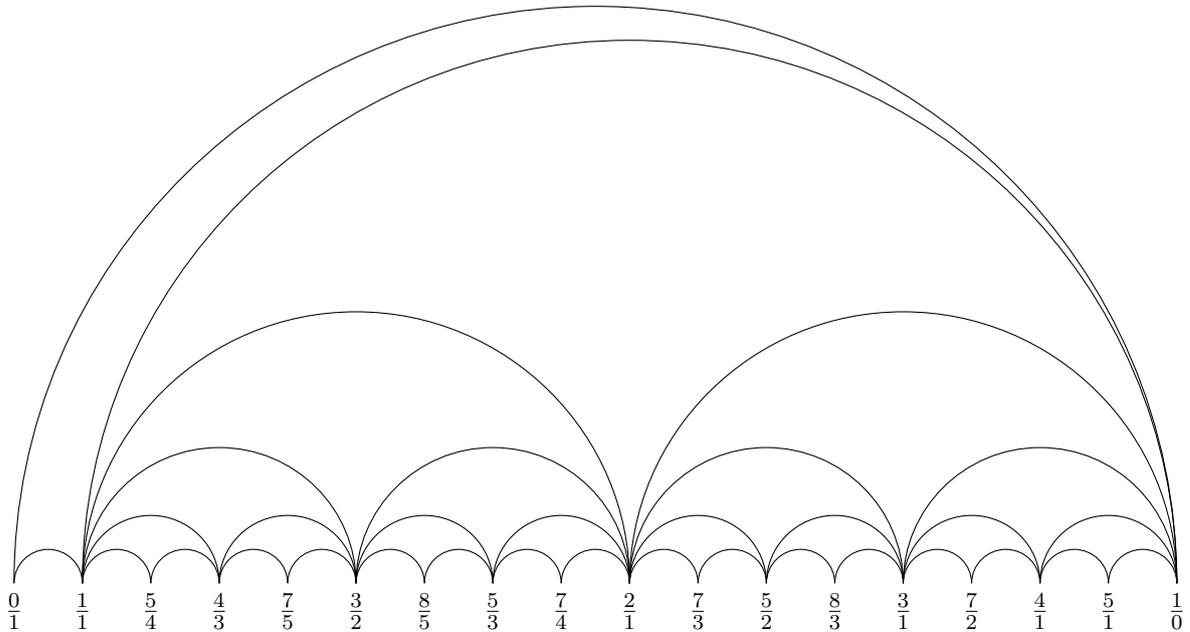


FIGURE 2.1 : Une partie du graphe de Farey

Dans cette section, nous expliquons comment extraire la triangulation  $\mathbb{T}_{r/s}$  du graphe de Farey. Cette construction est due à C. Series [61], et permet de déduire la Proposition de son résultat.

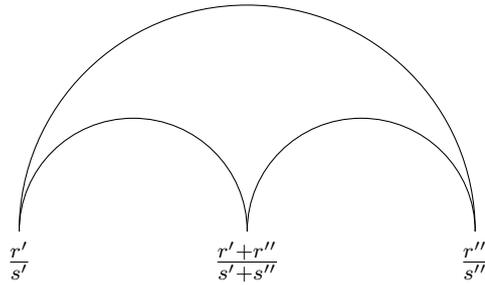
**Définition 2.1.7.** a) L'ensemble des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$ , complété par  $\infty$  (représenté par  $\frac{1}{0}$ ), forment un graphe appelé le *graphe de Farey*. Deux rationnels écrits sous forme de fractions irréductibles,  $\frac{r'}{s'}$  et  $\frac{r''}{s''}$ , sont reliés par une arête si et seulement si  $r's'' - r''s' = \pm 1$ .

b) En incluant  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  dans le bord du demi-plan hyperbolique  $H$ , les bords sont souvent représentés comme des géodésiques de  $H$  (qui sont des demi-cercles) et le graphe de Farey divise  $H$  en un ensemble infini de triangles appelé la *triangulation de Farey*

Pour construire le graphe nous avons besoin des éléments suivants :

a) Les arêtes de la triangulation de Farey ne se croisent jamais, sauf aux extrémités.

b) Chaque triangle du graphe de Farey est de la forme  $\left\{ \frac{r'}{s'}, \frac{r'+r''}{s'+s''}, \frac{r''}{s''} \right\}$ .

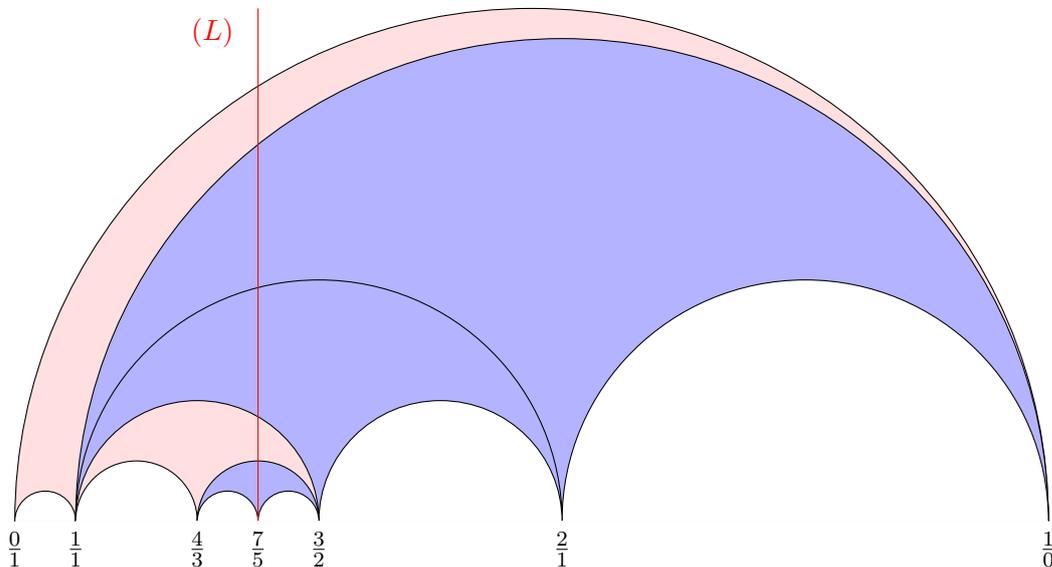


Nous nous concentrons sur la partie du graphe constituée des nombres rationnels supérieurs ou égaux à 1.

La construction de [61] est la suivante. Fixer un nombre rationnel  $\frac{r}{s}$  et tracer une ligne verticale  $(L) \subset H$ . Rassembler tous les triangles de la triangulation de Farey traversés à l'intérieur par cette ligne. On obtient ainsi la triangulation  $\mathbb{T}_{r/s}$ .

La propriété des triangles d'être situés "base en bas" et "base en haut" considérée au § se lit maintenant comme : "base à gauche de  $(L)$ " et "base à droite de  $(L)$ ". Les deux sommets extérieurs sont  $\frac{0}{1}$  et  $\frac{r}{s}$ . Les sommets sont énumérés de 1 à  $n$  de  $\frac{1}{0}$  à  $\frac{0}{1}$  dans l'ordre décroissant. Le sommet  $\frac{r}{s}$  est le sommet numéro  $k + 1$ .

**Exemple 2.1.8.** En choisissant  $\frac{7}{5} = [1, 2, 1, 1] = \llbracket 2, 2, 3 \rrbracket$ , nous obtenons l'image suivante :



où sont colorés en rose les triangles à gauche de  $(L)$  et en bleu ceux à droite de  $(L)$ . Notons que le triangle le plus bas peut être vu soit à gauche, soit à droite de  $(L)$ . Il s'agit précisément de la triangulation  $\mathbb{T}_{7/5}$  (cf. Exemple) vue à l'intérieur de la triangulation de Farey.

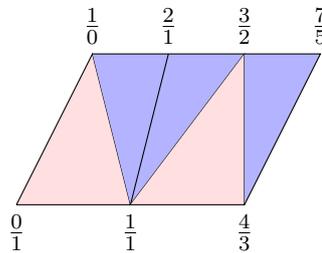
Comme dans le cas des triangulations des polygones, nous pouvons donner une interprétation des coefficients  $a_i$  et  $c_i$ .

**Interprétation des  $a_i$ .** De haut en bas, la ligne verticale commence à croiser  $a_1$  triangles adjacents dont la base est à gauche (en rose sur l'image), puis  $a_2$  triangles adjacents dont la base est à droite (en bleu sur l'image), puis  $a_3$  triangles dont la base est à gauche, et ainsi de suite. Il y a une ambiguïté pour le dernier triangle (celui dont le sommet médian est  $\frac{r}{s}$ ). Nous déterminons le dernier triangle de manière à avoir un nombre pair de coefficients  $a_i$ .

Dans l'exemple de  $\frac{r}{s} = \frac{7}{5}$ , on compte  $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, 1, 1)$ , qui coïncident avec les coefficients du développement de la fraction continue régulière  $\frac{7}{5} = [1, 2, 1, 1]$ .

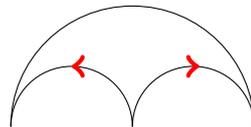
**Interprétation de  $c_i$ .** Ces coefficients comptent les nombres de triangles dans  $\mathbb{T}_{\frac{r}{s}}$  incidents à chaque sommet situés à droite de  $\frac{r}{s}$  et énumérés par ordre décroissant. Dans l'exemple de  $\mathbb{T}_{\frac{7}{5}}$ , on compte  $c_1 = 2$  triangles incidents au sommet  $\frac{1}{0}$ ,  $c_2 = 2$  triangles incidents à  $\frac{2}{1}$  et  $c_3 = 3$  triangles incidents à  $\frac{3}{2}$ , qui coïncident avec les coefficients du développement de la fraction continue négative  $\frac{7}{5} = \llbracket 2, 2, 3 \rrbracket$ .

On peut simplifier l'image et dessiner des triangulations de polygones convexes (non strictement convexes) au lieu de triangulations dans le graphe de Farey. Par exemple, la triangulation de Farey  $\mathbb{T}_{\frac{7}{5}}$  sera représentée par l'heptagone convexe triangulé suivant :



### 2.1.5 Orientation dans les graphes

Nous attribuons une orientation à chaque arête du graphe de Farey, à l'exception de l'arête reliant  $\frac{0}{1}$  et  $\frac{1}{0}$ , de façon à ce que la règle locale suivante s'applique dans chaque triangle :



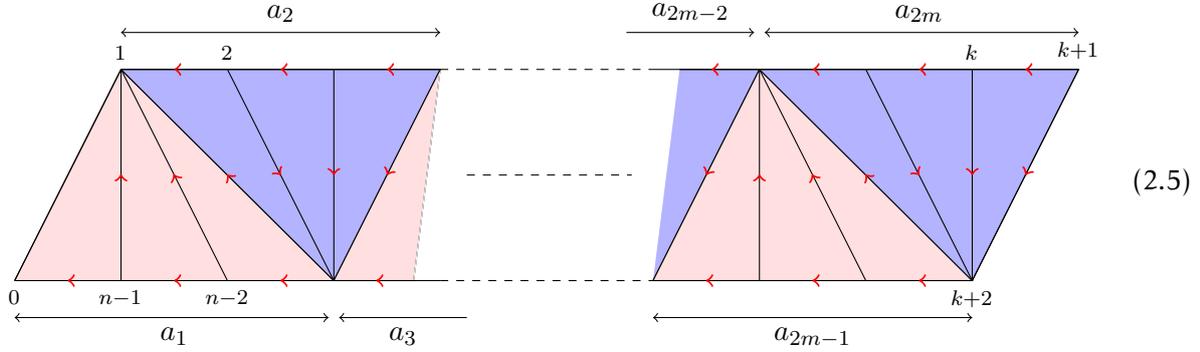
À l'exception des sommets étiquetés par  $\frac{0}{1}$  et  $\frac{1}{0}$ , chaque sommet est le point médian d'un triangle unique, de sorte qu'à chaque sommet il y a exactement deux flèches sortantes, l'une orientée vers la gauche et l'autre vers la droite.

Un *chemin* dans le graphe de Farey est une suite

$$\pi : \frac{r_0}{s_0} \xrightarrow{\rho_1} \frac{r_1}{s_1} \xrightarrow{\rho_2} \dots \xrightarrow{\rho_{n-1}} \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} \xrightarrow{\rho_n} \frac{r_n}{s_n}$$

telle que  $\rho_i$  est une arête orientée de  $\frac{r_{i-1}}{s_{i-1}}$  vers  $\frac{r_i}{s_i}$ . Nous écrirons en abrégé  $\pi : \frac{r_0}{s_0} \rightarrow \frac{r_n}{s_n}$ .

Considérons la triangulation  $\mathbb{T}$  d'un  $n$ -gone convexe (non strictement convexe) de la forme suivante :



L'orientation des arêtes présentée précédemment dans le graphe de Farey induit donc une orientation dans les graphes des triangulations des  $n$ -gones convexes.

En outre, la triangulation  $\mathbb{T}$  (2.5) est accompagnée d'une orientation des arêtes comme suit :

- Une arête adjacente à un triangle dont la base est en haut à sa droite et à un triangle dont la base est en bas à sa gauche est orientée vers le haut ;
- Une arête adjacente à un triangle dont la base est en bas à sa droite et à un triangle dont la base est en haut à sa gauche est orientée vers le bas ;
- Une arête adjacente à deux triangles base en haut est orientée vers le bas ;
- Une arête adjacente à deux triangles base en bas est orientée vers le haut ;
- Une arête de la base est orientée vers la gauche ;
- L'arête la plus à droite est orientée vers le bas ;
- L'arête la plus à gauche n'a pas d'orientation.

## 2.2 Matrices de fractions continues négatives et régulières

Il est pratique d'utiliser des matrices  $2 \times 2$  pour représenter les fractions continues. L'une des raisons est que les matrices correspondantes appartiennent au groupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  et permettent des opérations telles que la multiplication, l'inversion, la transposition ; voir [64]. Une autre raison particulièrement importante est que les matrices sont plus "pérennes" que les fractions continues. Elles continuent d'exister lorsque les fractions continues ne sont pas bien définies (à cause de zéros potentiels dans les dénominateurs) et jouissent de propriétés similaires.

Dans cette section, cependant, nous supposons toujours que les fractions continues sont bien définies. Considérons un nombre rationnel développé en fractions continues comme (2.1)

$$\frac{r}{s} = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket = [a_1, \dots, a_{2m}].$$

L'information sur ces développements est contenue dans les matrices

$$M(c_1, \dots, c_n) := \begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

et

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) := \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{2m} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Nous allons rappeler les propriétés de ces deux matrices et rappeler comment nous pouvons les réécrire l'une à partir de l'autre. Ceci, en particulier, impliquera la formule (2.2).

### 2.2.1 Fractions continues généralisée

Rappelons d'abord qu'en toute généralité, si l'on considère la fraction continue généralisée

$$F_n = x_1 + \frac{y_1}{x_2 + \frac{y_2}{\cdots + \frac{y_{n-1}}{x_n}}}, \quad (2.8)$$

où  $x_i$  et  $y_i$  sont considérés comme des variables formelles.

Il est bien connu, par exemple dans [22], qu'il peut être obtenu par des calculs de matrices  $2 \times 2$  comme ci-dessous.

**Lemme 2.2.1.** *Le produit matriciel*

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_n & y_n U_{n-1} \\ V_n & y_n V_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

donne

$$\frac{U_n}{V_n} = F_n.$$

Le Lemme nous donne les relations de récurrences suivantes.

**Corollaire 2.2.2.** *Nous avons les relations de récurrences suivantes sur les numérateurs et les dénominateurs des convergents.*

$$x_{n+1}U_n + y_nU_{n-1} = U_{n+1} \quad \text{et} \quad x_{n+1}V_n + y_nV_{n-1} = V_{n+1} \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Les matrices de fractions continues

Nous travaillons plus particulièrement avec les fractions continues négatives et régulières pour lesquelles  $y_i = \pm 1$  dans (2.8) et (2.9). Nous obtenons dans ces cas les matrices (2.6) et (2.7) pour lesquelles le Lemme se reformule comme suit

**Proposition 2.2.3.** *Quelles que soient les suites d'entiers  $(c_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$  et  $(a_i)$ ,  $1 \leq i \leq 2m$ , on a*

$$M(c_1, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} r & -r' \\ s & -s' \end{pmatrix}, \quad M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = \begin{pmatrix} r & r'' \\ s & s'' \end{pmatrix},$$

où  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2m}] = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$ , et où  $\frac{r'}{s'} = \llbracket c_1, \dots, c_{k-1} \rrbracket$ , et  $\frac{r''}{s''} = [a_1, \dots, a_{2m-1}]$ .

**Exemple 2.2.4.** En choisissant comme dans l'Exemple , le rationnel  $\frac{r}{s} = \frac{7}{5}$ , on obtient

$$M^+(1, 2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad M(2, 2, 3) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Notons que ces matrices ont des traces différentes et ne peuvent donc pas être équivalentes sur le plan de la conjugaison.

### 2.2.3 Groupe modulaire

Les matrices (2.6) et (2.7) appartiennent au groupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  (des matrices de  $GL(2, \mathbb{Z})$  apparaissent aussi dans (2.7) mais il y a un nombre pair de telles matrices).

Nous considérons les matrices particulières suivantes :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Il est bien connu que toute paire de matrices parmi ces trois forme un système de générateurs du groupe  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

Nous considérerons aussi ces matrices au signe près, i.e. comme éléments du groupe  $PSL(2, \mathbb{Z})$ .

### 2.2.4 Matrices $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$ et $M(c_1, \dots, c_k)$ en termes de générateurs

Il est utile d'avoir les expressions de  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  et  $M(c_1, \dots, c_k)$  en termes de générateurs de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Les formules suivantes sont standards et peuvent être trouvées dans de nombreuses sources.

**Proposition 2.2.5.** *Les matrices  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  et  $M(c_1, \dots, c_k)$  ont les décompositions suivantes :*

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = R^{a_1} L^{a_2} R^{a_3} L^{a_4} \dots R^{a_{2m-1}} L^{a_{2m}}, \quad (2.12)$$

$$M(c_1, \dots, c_k) = R^{c_1} S R^{c_2} S \dots R^{c_k} S, \quad (2.13)$$

Toute matrice de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  se décompose comme ci-dessus mais en outre nous pouvons nous permettre de choisir des  $c_i$  particuliers comme l'indique la proposition suivante.

**Proposition 2.2.6** ([43]). *Chaque matrice  $M \in PSL(2, \mathbb{Z})$  peut s'écrire  $M = M(c_1, \dots, c_k)$  avec tous les  $c_i \geq 2$  sauf peut-être pour  $c_1$  ou simultanément  $c_1, c_2$ , et pour  $c_k$  ou simultanément  $c_{k-1}, c_k$  qui peut être égal à un.*

Finalement on peut remarquer que  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  et  $M(c_1, \dots, c_k)$  ont la même première colonne, mais elles sont différentes. Il existe une relation simple entre ces matrices dans le cas où  $a_i \geq 1$  et  $c_i \geq 2$ . Nous expliciterons une formule plus générale dans le §.

**Proposition 2.2.7.** *On a :*

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = M(c_1, \dots, c_k) R, \quad (2.14)$$

### 2.2.5 Conversion des matrices

La matrice  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  avec  $a_i \geq 1$  peut être réécrite sous la forme (2.6) de la manière suivante.

**Proposition 2.2.8** ([43]). *On a :*

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = -M(a_1 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2-1}, a_3 + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_4-1}, \dots, a_{2m-1} + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{2m}}, 1, 1). \quad (2.15)$$

Soulignons que (2.15) est équivalent à (2.14) en supposant que nous connaissons déjà la formule (2.2). Sinon, il est possible d'utiliser (2.15) pour prouver (2.2).

Pour prouver la Proposition, il est utile d'énoncer le lemme suivant.

**Lemme 2.2.9** ([43]). *On a  $R^a = -M(a + 1, 1, 1)$  et  $L^a = -M(1, \underbrace{2, \dots, 2}_a, 1, 1)$ .*

*Démonstration.* Par un calcul direct, on obtient facilement  $M(a + 1, 1, 1) = -R^a$ . Pour la deuxième formule, on utilise le résultat préliminaire suivant qui s'obtient facilement par récurrence

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^a = \begin{pmatrix} a + 1 & -a \\ a & -(a - 1) \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct conduit alors à  $M(1, \underbrace{2, \dots, 2}_a, 1, 1) = -L^a$ . □

La preuve de la Proposition s'ensuit.

*Démonstration.* Puisque  $M(1, 1, 1) = -\text{Id}$ , on obtient par le lemme précédent

$$R^{a_i} L^{a_{i+1}} = -M(a_i + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{i+1}}, 1, 1).$$

La formule (2.15) découle alors de () et de la simple relation  $M(2, 1, 1, a + 1) = -M(a + 2)$ . □

**Remarque 2.2.10.** Enfin, on note que les trois derniers coefficients de (2.15) sont  $(2, 1, 1)$ , et peuvent être supprimés en utilisant l'égalité  $M(2, 1, 1) = -R$ . On obtient donc

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = M(a_1 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2-1}, a_3 + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_4-1}, \dots, a_{2m-1} + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{2m}-1})R. \quad (2.16)$$

D'après la Proposition, la première colonne des matrices du côté droit et du côté gauche donne le rationnel  $\frac{r}{s}$ . Cela établit donc la formule (2.2).

## 2.3 Continuants = "déterminant des fractions continues"

### 2.3.1 Généralités sur les continuants

Le contenu de cette sous-section est de nouveau classique.

Considérons  $(c_1, \dots, c_n)$  comme des variables formelles commutatives, et considérons la fraction continue négative :

$$\frac{r_n}{s_n} = \llbracket c_1, \dots, c_n \rrbracket. \quad (2.17)$$

Alors le numérateur et le dénominateur sont des polynômes en  $c_i$ . Il s'avère que ces polynômes sont fondamentalement les mêmes.

**Définition 2.3.1.** Le déterminant tridiagonal

$$E_n(c_1, \dots, c_n) := \det \begin{pmatrix} c_1 & 1 & & & \\ & 1 & c_2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & c_{n-1} & 1 \\ & & & & 1 & c_n \end{pmatrix}$$

est appelé *continuants*.

**Proposition 2.3.2** ([43]). *Le numérateur et le dénominateur de (2.17) sont donnés par les continuants*

$$\begin{cases} r_n = E_n(c_1, \dots, c_n), \\ s_n = E_{n-1}(c_2, \dots, c_n). \end{cases} \quad (2.18)$$

*Démonstration.* La formule (2.18) découle de la relation de récurrence

$$V_{i+1} - c_{i+1}V_i + V_{i-1} = 0, \quad (2.19)$$

avec des coefficients (connus)  $(c_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  et une séquence (indéterminée)  $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . En effet, si  $\frac{r_i}{s_i} = \llbracket c_1, \dots, c_i \rrbracket$  est un convergent de la fraction continue (2.17), alors les deux suites,  $(r_i)_{i \geq 1}$  et  $(s_i)_{i \geq 1}$  satisfont (2.19), avec les conditions initiales  $(r_1, r_2) = (c_1, c_1c_2 - 1)$  et  $(s_1, s_2) = (1, c_2)$ . D'autre part, les continuants satisfont

$$E_i(c_1, \dots, c_i) = c_i E_{i-1}(c_1, \dots, c_{i-1}) - E_{i-2}(c_1, \dots, c_{i-2}). \quad (2.20)$$

D'où le résultat. □

En conséquence de (2.18), nous obtenons la formule suivante pour les entrées de la matrice  $M(c_1, \dots, c_n)$  :

$$M(c_1, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} E_n(c_1, \dots, c_n) & -E_{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1}) \\ E_{n-1}(c_2, \dots, c_n) & -E_{n-2}(c_2, \dots, c_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

En effet,  $M(c_1, \dots, c_n)$  est la matrice des convergents, cf. §.

**Remarque 2.3.3.** a) La formule (2.18) permet de travailler avec des fractions continues avec des  $c_i$  assignés à des nombres concrets (entiers, réels, complexes, etc.), même si l'expression "naïve" (2.17) n'est pas bien définie. Cela peut se produire lorsque certains dénominateurs s'annulent, par exemple si plusieurs coefficients consécutifs  $c_i, c_{i+1}, \dots$  sont égaux à 1.

b) En remplaçant la fraction continue négative par une fraction continue régulière, la formule (2.18) est remplacée par une formule similaire à la seule différence que le continuant



**Exemple 2.3.5.** Dans le cas  $n = 3$ , on peut facilement vérifier directement que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & c_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_3 \\ -c_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -c_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -c_3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (c_1 c_2 c_3 - c_1 - c_2 - c_3)^2,$$

qui n'est autre que le carré de la trace de  $M(c_1, c_2, c_3)$ .

## 2.4 Exemples supplémentaires : Matrices de Cohn

Donnons d'autres exemples de matrices intéressantes dont nous étudierons les  $q$ -analogues dans §.

**Exemple 2.4.1.** (a) On peut écrire  $R^a$  de la manière suivante  $R^a = M(a + 1, 1, 1)$ , ainsi que  $L^a$  et  $R^{-a}$  des façons suivantes :

$$L^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = M(1, \underbrace{2, \dots, 2}_a, 1, 1), \quad R^{-a} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_a, 1).$$

(b) On peut réécrire la matrice  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  grâce à (2.15).

(c) Les matrices de Cohn sont les triplets de matrices,  $(A, AB, B)$  dans lesquelles les triplets de nombres de Markov apparaissent à la fois comme entrée supérieure droite et comme  $\frac{1}{3}$  des traces. On sait (voir [1]) que de telles matrices sont énumérées par  $(n, t)$ , où  $n \in \mathbb{Z}$  et  $t$  est un  $0 \leq t \leq 1$  rationnel. Le triplet initial des matrices de Cohn donné par

$$A(n) = \begin{pmatrix} n & 1 \\ 3n - n^2 - 1 & 3 - n \end{pmatrix}$$

et  $B(n) := A(n)A(n+1)$  correspond au triplet de Markov  $(1, 5, 2) = \left(\frac{1}{3}\text{tr}(A), \frac{1}{3}\text{tr}(AB), \frac{1}{3}\text{tr}(B)\right)$ .

Les autres triplets de matrices de Cohn sont donnés par les produits des matrices du triplet initial, codés par un arbre isomorphe à l'arbre de Farey (ou de Stern-Brocot) des rationnels dans  $[0, 1]$ , à partir du triplet  $(0, \frac{1}{2}, 1)$ .

On peut écrire ces matrices avec  $n \geq 2$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A(n) &= M(1, 1, n - 1, \underbrace{2, \dots, 2}_n, 1, 1), \\ B(n) &= M(1, 1, n - 1, 3, \underbrace{2, \dots, 2}_n, 1, 1), \\ A(n)B(n) &= M(1, 1, n - 1, 2, 4, \underbrace{2, \dots, 2}_n, 1, 1). \end{aligned}$$

En outre,

$$A(n)^2B(n) = M(1, 1, n - 1, 2, 3, 4, \underbrace{2, \dots, 2}_n, 1, 1),$$

$$A(n)B(n)^2 = M(1, 1, n - 1, 2, 4, 2, 4, \underbrace{2, \dots, 2}_n, 1, 1),$$

etc.

# Chapitre 3

## $q$ -rationnels

Les  $q$ -rationnels ont été introduits dans [45] et se calculent en utilisant les développements en fractions continues des nombres rationnels. Ce sont des quotients de deux polynômes à coefficients entiers en  $q$ , autrement dit, des fractions rationnelles à coefficients entiers en  $q$ . Initialement, ces  $q$ -rationnels ont été introduits et construits à partir de rationnels supérieurs ou égaux à 1 et un théorème principal énonce que les  $q$ -déformations des deux différents développements en fractions continues coïncident. Le Théorème élargit ce résultat en donnant une totale liberté aux coefficients des fractions continues, ce qui nous permet de  $q$ -déformer tout  $x \in \mathbb{Q}$  et de travailler avec n'importe quelle décomposition d'un nombre rationnel. La Proposition nous donnera la structure générale d'un  $q$ -rationnel et les propriétés des polynômes obtenus au numérateur et au dénominateur des fractions rationnelles seront énoncées. Par la suite, les résultats énoncés dans la Section seront reformulés de manière matricielle. Nous donnons une  $q$ -version des continuants introduits dans la Section . Ces  $q$ -continuants se retrouvent dans les  $q$ -déformations des fractions continues mais aussi dans les entrées des  $q$ -matrices (Proposition ). Nous nous concentrons donc dans ce chapitre sur l'obtention des  $q$ -rationnels par les  $q$ -déformations des fractions continues ainsi que les  $q$ -déformations des matrices, mais mentionnons qu'une autre façon de les construire sera présentée dans le Chapitre , il s'agit d'une méthode récursive basée sur des interprétations combinatoires dans des graphes.

### 3.1 $q$ -fractions continues

Dans cette section nous définissons les  $q$ -déformations des fractions continues finies et formulons leurs premières propriétés de base. D'abord, commençons par rappeler ce qu'est un  $q$ -entier.

**Définition 3.1.1.** Soit  $n \in \mathbb{Z}$  et  $q$  un paramètre formel. Alors on a

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

$[n]_q$  est donc un polynôme à coefficients entiers en  $q$  si  $n > 0$ , en  $q^{-1}$  si  $n < 0$ .

De plus,  $[0]_q = 0$ .

Intéressons nous maintenant aux  $q$ -rationnels.

#### 3.1.1 La définition principale

Nous avons introduit dans le Chapitre la relation (2.1), qui rappelle la définition des deux développements en fractions continues pour les nombres rationnels  $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ . Cependant dans

ce chapitre, on donnera plus de liberté aux coefficients  $a_i$  et  $c_i$ , en s'autorisant  $a_i, c_i \in \mathbb{Z}$ . Cette contrainte levée, nous prive de l'unicité de ces décompositions, mais nous permet de considérer tout  $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$  (et non uniquement  $\frac{r}{s} > 1$  comme cela avait été fait initialement dans [45]) et n'importe quelle décomposition donnant un nombre rationnel.

Nous commençons par énoncer une formule explicite permettant de  $q$ -déformer les fractions continues régulières et négatives. Des définitions équivalentes, mais plus combinatoires, seront données dans la Section .

**Définition 3.1.2.** ([45]) (a) Étant donné une fraction continue régulière  $[a_1, \dots, a_{2m}]$ , nous définissons sa  $q$ -déformation par

$$[a_1, \dots, a_{2m}]_q := [a_1]_q + \frac{q^{a_1}}{[a_2]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_2}}{[a_3]_q + \frac{q^{a_3}}{[a_4]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_4}}{\ddots \frac{q^{a_{2m-1}}}{[a_{2m-1}]_q + \frac{q^{a_{2m-1}}}{[a_{2m}]_{q^{-1}}}}}}}. \quad (3.1)$$

(b) Étant donné une fraction continue négative  $\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$ , nous définissons sa déformation par

$$\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket_q := [c_1]_q - \frac{q^{c_1-1}}{[c_2]_q - \frac{q^{c_2-1}}{\ddots \frac{q^{c_{k-1}-1}}{[c_{k-1}]_q - \frac{q^{c_{k-1}-1}}{[c_k]_q}}}}}. \quad (3.2)$$

**Remarque 3.1.3.** Les expressions (3.1) et (3.2) nous donnent des fractions rationnelles en  $q$  à coefficients entiers.

La preuve du théorème suivant sera faite dans la Section .

**Théorème 3.1.4.** Pour tout  $a_i, c_i \in \mathbb{Z}$ , si une fraction continue régulière  $[a_1, \dots, a_{2m}]$  et une fraction continue négative  $\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$  représentent le même nombre rationnel alors leurs  $q$ -déformations coïncident aussi :

$$[a_1, \dots, a_{2m}]_q = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket_q.$$

**Remarque 3.1.5.** Le Théorème était déjà connu et démontré dans [45], dans le cas où  $a_i \geq 1$  et  $c_i \geq 2$  (il en est de même pour la définition suivante).

**Définition 3.1.6.** Soient  $a_i, c_i \in \mathbb{Z}$ . Étant donné un nombre rationnel  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2m}] = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$ , la fonction rationnelle définie par (3.1) et (3.2) sera appelée la  $q$ -déformation de  $\frac{r}{s}$ , ou simplement un  $q$ -rationnel.

**Exemple 3.1.7.** (a) Voici quelques exemples qui peuvent être calculés directement à partir des définitions

$$\begin{aligned}
 \left[-\frac{5}{3}\right]_q &= [-2, 3]_q = \llbracket -1, 2, 2 \rrbracket_q = -q^{-2} \frac{1+2q+q^2+q^3}{1+q+q^2} \\
 \left[-\frac{1}{4}\right]_q &= [-1, 1, 3]_q = \llbracket 0, 4 \rrbracket_q = -q^{-1} \frac{1}{1+q+q^2+q^3} \\
 \left[\frac{5}{12}\right]_q &= [0, 2, 2, 2]_q = \llbracket 1, 3, 2 \rrbracket_q = q^2 \frac{1+2q+q^2+q^3}{1+2q+3q^2+3q^3+2q^4+q^5} \\
 \left[\frac{3}{5}\right]_q &= [0, 1, 1, 2]_q = \llbracket 1, 2, 4, 2 \rrbracket_q = q \frac{1+q+q^2}{1+2q+q^2+q^3} \\
 \left[\frac{5}{3}\right]_q &= [1, 1, 1, 1]_q = \llbracket 2, 3 \rrbracket_q = \frac{1+q+2q^2+q^3}{1+q+q^2} \\
 \left[\frac{12}{5}\right]_q &= [2, 2, 1, 1]_q = \llbracket 3, 2, 3 \rrbracket_q = \frac{1+2q+3q^2+3q^3+2q^4+q^5}{1+q+2q^2+q^3}
 \end{aligned}$$

(b) Seules quelques rares  $q$ -déformations de rationnels sont obtenues comme le rapport des  $q$ -entiers dans les numérateurs et les dénominateurs. Par exemple pour  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{r+1}{r}\right]_q &= \frac{[r+1]_q}{[r]_q}, & \left[\frac{r}{r+1}\right]_q &= q \frac{[r]_q}{[r+1]_q}, \\
 \left[-\frac{r+1}{r}\right]_q &= -q^{-2} \frac{[r+1]_q}{[r]_q}, & \left[-\frac{r}{r+1}\right]_q &= -q^{-1} \frac{[r]_q}{[r+1]_q}.
 \end{aligned}$$

**Exemple 3.1.8.** Pour illustrer le Théorème, on peut aussi écrire  $\frac{5}{3} = [2, -1, -1, 2] = \llbracket -1, 0, 3, 3 \rrbracket$  et on calcule

$$\begin{aligned}
 [2, -1, -1, 2]_q &= 1 + q + \frac{q^2}{-q + \frac{q}{-q^{-1} + \frac{q^{-1}}{1+q^{-1}}}} = \frac{1+q+2q^2+q^3}{1+q+q^2}, \\
 \llbracket -1, 0, 3, 3 \rrbracket_q &= -q^{-1} - \frac{q^{-2}}{0 - \frac{q^{-1}}{1+q+q^2 - \frac{q^2}{1+q+q^2}}} = \frac{1+q+2q^2+q^3}{1+q+q^2}.
 \end{aligned}$$

Rajoutons que si les opérations algébriques étaient bien conservées pour tout nombre rationnel  $x > 1$  (comme cela était énoncé dans [45]), elles le demeurent dans le cas où  $x \in \mathbb{Q}$ , comme l'indique la proposition suivante, qui se prouve par calcul direct en utilisant la formule (3.1).

**Proposition 3.1.9.** Pour  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$[x+n]_q = q^n [x]_q + [n]_q, \quad (3.3)$$

$$[-x]_q = -q^{-1} [x]_{q^{-1}}, \quad (3.4)$$

$$\left[\frac{1}{x}\right]_q = \frac{1}{[x]_{q^{-1}}}, \quad (3.5)$$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_q = -\frac{1}{q[x]_q}. \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Propriétés fondamentales des polynômes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$

Nous énonçons maintenant la structure générale d'un  $q$ -rationnel.

**Proposition 3.1.10.** Soit  $\frac{r}{s}$  un nombre rationnel non nul.

(i) ([45]) Il existe un couple unique de polynômes premiers entre eux  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{Z}[q]$  et  $N \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\left[ \frac{r}{s} \right]_q = \pm q^{-N} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}, \quad (3.7)$$

où le signe coïncide avec le signe de  $\frac{r}{s}$ ;

(ii) ([45]) Si  $\frac{r}{s} \geq 1$  alors  $N = 0$ ;

(iii) Si  $\frac{r}{s} \leq 0$  alors  $-N = \text{Ent} \left( \frac{r}{s} \right)$ ;

(iv) Si  $0 < \frac{r}{s} < 1$  alors  $N - 1 = \text{Ent} \left( \frac{-s}{r} \right)$ , autrement dit,  $N = \text{Ent} \left( \frac{-s}{r} \right) + 1$ .

*Démonstration.* - Si  $\frac{r}{s} \geq 1$  : Ce cas est déjà connu et prouvé dans [45].

- Si  $\frac{r}{s} \leq 0$  : alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $-N \leq \frac{r}{s} < -N + 1$  (autrement dit,  $N$  est la partie entière de  $\frac{r}{s}$ ).

Ainsi,  $\frac{r}{s} = \llbracket -N + 1, c_2, \dots, c_k \rrbracket$  et donc

$$\left[ \frac{r}{s} \right]_q = [-N + 1]_q - \frac{q^{-N}}{\llbracket c_2, \dots, c_k \rrbracket_q}$$

avec  $[-N + 1]_q = q^{-N+1}P$  où  $P$  est un polynôme en  $q$  dont le coefficient constant vaut 1 et  $\llbracket c_2, \dots, c_k \rrbracket_q = \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'}$  où  $\mathcal{R}', \mathcal{S}'$  sont des polynômes en  $q$  dont les coefficients constants sont 1. On obtient donc

$$\left[ \frac{r}{s} \right]_q = q^{-N+1}P - \frac{q^{-N}}{\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'}} = \frac{q^{-N+1}P\mathcal{R}' - q^{-N}\mathcal{S}'}{\mathcal{R}'} = -q^{-N} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}$$

où  $\mathcal{R}, \mathcal{S}$  sont des polynômes en  $q$  dont les coefficients constants sont 1.

- Si  $0 < \frac{r}{s} < 1$  : alors  $\frac{-s}{r} < -1$  et d'après le cas précédent, il existe  $\mathcal{R}, \mathcal{S}$  des polynômes vérifiant les conditions de la proposition ainsi que  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\left[ \frac{-s}{r} \right]_q = -q^{N-1} \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{R}}$ .

Or, d'après (i) on a  $\left[ \frac{r}{s} \right]_q = \frac{-1}{q \left[ \frac{-s}{r} \right]_q}$ , ainsi on obtient que  $\left[ \frac{r}{s} \right]_q = q^{-N} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}$ .  $\square$

Les énoncés qui suivent donnent des propriétés sur les polynômes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  obtenus dans l'expression (3.7). Ces propriétés ont dans un premier temps été données dans [45] dans le cas où le rationnel  $\frac{r}{s} > 1$ , mais il s'avère qu'elles sont conservées pour tout  $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ . Une propriété importante des polynômes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  est la propriété de positivité suivante.

**Proposition 3.1.11.**  $\left[ \frac{r}{s} \right]_q = \frac{\mathcal{R}(q)}{\mathcal{S}(q)}$ , où les polynômes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  ont des coefficients entiers positifs.

Cette propriété ne découle pas immédiatement de l'expression (3.1) ni de l'expression (3.2). Nous donnerons une interprétation combinatoire des coefficients de ces polynômes plus tard ; voir Chapitre .

Soit  $(c_i)_{1 \leq i \leq k}$  une suite d'entiers relatifs. Considérons deux suites  $(\mathcal{R}_i)_{i \geq 0}$  et  $(\mathcal{S}_i)_{i \geq 0}$  de polynômes en  $q$  définis par les récurrences suivantes

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{i+1} &= [c_{i+1}]_q \mathcal{R}_i - q^{c_i-1} \mathcal{R}_{i-1}, \\ \mathcal{S}_{i+1} &= [c_{i+1}]_q \mathcal{S}_i - q^{c_i-1} \mathcal{S}_{i-1},\end{aligned}\tag{3.8}$$

avec les conditions initiales  $(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1) = (1, [c_1]_q)$  et  $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) = (0, 1)$ .

La fraction continue  $\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket_q$  donnée par (3.2) appartient à la classe des "fractions continues généralisées". Pour cette classe, il est bien connu que les numérateurs et les dénominateurs des convergents satisfont des relations de récurrence données par les coefficients des fractions continues (voir (2.10)). Dans notre cas, on obtient les récurrences (3.8), et donc

$$\llbracket c_1, \dots, c_i \rrbracket_q = \frac{\mathcal{R}_i(q)}{\mathcal{S}_i(q)},$$

pour tout  $1 \leq i \leq k$ .

**Proposition 3.1.12** ([45]). *Pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,*

- (i) *le terme de plus haut degré de  $\mathcal{R}_i$  est  $q^{c_1+\dots+c_i-i}$  et le terme constant est 1 ;*
- (ii) *le terme de plus haut degré de  $\mathcal{S}_i$  est  $q^{c_2+\dots+c_i-i+1}$  et le terme constant est 1 ;*
- (iii)  *$\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{S}_i$  ont des coefficients entiers positifs ;*
- (iv)  *$\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{S}_i$  sont premiers entre eux.*

En particulier, pour  $i = k$  on obtient que  $\mathcal{R}_k$  et  $\mathcal{S}_k$  sont précisément les polynômes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  de (3.7), et on en déduit ce qui suit.

**Corollaire 3.1.13** ([45]). *Soit  $\frac{\mathcal{R}(q)}{\mathcal{S}(q)} = [a_1, \dots, a_{2m}]_q = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket_q$ .*

(i) *Les degrés des polynômes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont*

$$\begin{aligned}\deg(\mathcal{R}) &= c_1 + \dots + c_k - k &= a_1 + \dots + a_{2m} - 1, \\ \deg(\mathcal{S}) &= c_2 + \dots + c_k - k + 1 &= a_2 + \dots + a_{2m} - 1.\end{aligned}$$

(ii) *Les coefficients des termes de plus haut degré de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont égaux à 1.*

(iii) *Les constantes de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont égales à 1, de sorte que  $\mathcal{R}(0) = \mathcal{S}(0) = 1$  et  $\mathcal{R}(1) = r$ ,  $\mathcal{S}(1) = s$ .*

## 3.2 Matrices de fractions continues et leurs $q$ -déformations

Pour plus de détails sur les matrices étudiées dans cette section dans le cas non déformé, voir la Section . Nous introduisons ici, toujours d'après [45], une autre façon (équivalente) de  $q$ -déformer les nombres rationnels en reprenant le lien entre les développements en fractions continues et les matrices de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Nous allons donc ici expliquer comment  $q$ -déformer les matrices de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et voir de quelle façon nous pouvons retrouver les  $q$ -rationnels précédemment introduits. Nous commençons dans un premier temps par  $q$ -déformer les générateurs de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  (§), puis nous introduisons le groupe  $\mathrm{PSL}_q(2, \mathbb{Z})$  (§) qui réalisant un isomorphisme avec  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  nous permettra de déformer n'importe quelle matrice  $M \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , et en particulier, les matrices des convergents dans lesquels nous retrouverons les  $q$ -rationnels (§).

### 3.2.1 $q$ -déformation des générateurs de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$

Commençons par introduire l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$  et son groupe d'unités  $U := \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]^\times = \{\pm q^N, N \in \mathbb{Z}\}$ . Puis, nous considérons les groupes suivants de matrices  $2 \times 2$  à coefficient dans  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A, B, C, D \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] : AD - BC \in U \right\},$$

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]) / U.$$

Introduisons maintenant les  $q$ -analogues des matrices génératrices  $R$  et  $S$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  définies dans la Proposition .

**Définition 3.2.1.** ([45]) Les  $q$ -analogues des matrices  $R$  et  $S$  sont les éléments suivants de  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}[q, q^{-1}])$

$$R_q := \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_q := \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.2.2.** Les  $q$ -analogues des matrices  $R$  et  $S$  satisfont  $(R_q S_q)^3 = -\mathrm{Id}$ ,  $S_q^2 = -q^{-1} \mathrm{Id}$ .

### 3.2.2 $q$ -éléments du groupe modulaire

On considère le sous-groupe engendré par les classes de  $R_q$  et  $S_q$  à l'intérieur de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}])$ . On définit

$$\mathrm{PSL}_q(2, \mathbb{Z}) := \langle R_q, S_q \rangle \subset \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]).$$

**Proposition 3.2.3.** *Le groupe  $\mathrm{PSL}_q(2, \mathbb{Z})$  est isomorphe à  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* Les seules relations de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sont  $(RS)^3 = S^2 = \mathrm{Id}$ . Dans  $\mathrm{PSL}_q(2, \mathbb{Z})$  on a également  $(R_q S_q)^3 = S_q^2 = \mathrm{Id}$ , de sorte que l'application suivante

$$\begin{aligned} [\cdot]_q : R &\mapsto [R]_q = R_q \\ &S \mapsto [S]_q = S_q \end{aligned} \tag{3.9}$$

est bien définie de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  vers  $\mathrm{PSL}_q(2, \mathbb{Z})$  et réalise un isomorphisme.  $\square$

Par conséquent, on peut considérer la  $q$ -déformation  $[M]_q$  de toute matrice  $M \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  par l'intermédiaire de la l'application (3.9).

**Exemple 3.2.4.** En calculant la décomposition  $L = RSR$ , on obtient la matrice  $q$ -déformée

$$[L]_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice  $L$  nous sera utile dans la suite car  $(R, L)$  est aussi un système standard de générateur de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

### 3.2.3 $q$ -déformation des matrices des convergents

Les expressions (2.6) et (2.7) définissent les matrices  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  et  $M(c_1, \dots, c_n)$  avec  $a_i, c_i \in \mathbb{Z}$  qui sont les matrices des convergents dans l'expression (2.1). L'objectif ici est de définir les  $q$ -déformations de ces matrices des convergents  $q$ -déformés que sont les expressions (3.1) et (3.2).

On veut appliquer l'isomorphisme (3.9) aux décompositions () et () de la Proposition , ce qui nous donne le lemme suivant.

**Proposition 3.2.5.** *On a*

$$M_q(c_1, \dots, c_k) = R_q^{c_1} S_q R_q^{c_2} S_q \cdots R_q^{c_k} S_q, \quad (3.10)$$

$$M_q^+(a_1, \dots, a_{2m}) = R_q^{a_1} L_q^{a_2} \cdots R_q^{a_{2m-1}} L_q^{a_{2m}}. \quad (3.11)$$

En effectuant les calculs on obtient finalement la proposition suivante.

**Proposition 3.2.6.** *Dans  $\text{PSL}_q(2, \mathbb{Z})$  on a*

$$(i) M_q(c_1, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} [c_1]_q & -q^{c_1-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [c_2]_q & -q^{c_2-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} [c_k]_q & -q^{c_k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(ii) M_q^+(a_1, \dots, a_{2m})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} q^{a_1} & [a_1]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{a_2} & 0 \\ q[a_2]_q & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q^{a_{2m-1}} & [a_{2m-1}]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{a_{2m}} & 0 \\ q[a_{2m}]_q & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} [a_1]_q & q^{a_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q[a_2]_q & 1 \\ q^{a_2} & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} [a_{2m-1}]_q & q^{a_{2m-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q[a_{2m}]_q & 1 \\ q^{a_{2m}} & 0 \end{pmatrix}, \\ &= q^{a_2+a_4+\dots+a_{2m}} \begin{pmatrix} [a_1]_q & q^{a_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_2]_{q^{-1}} & q^{-a_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} [a_{2m-1}]_q & q^{a_{2m-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_{2m}]_{q^{-1}} & q^{-a_{2m}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme , nous voyons immédiatement que les matrices ci-dessus  $M_q(c_1, \dots, c_k)$  et  $M_q^+(a_1, \dots, a_{2m})$  correspondent aux fractions continues déformées (3.1) et (3.2). Plus précisément, on obtient :

**Proposition 3.2.7.** *(i) Soit  $a_1, \dots, a_{2m}$  une suite d'entiers telle que  $[a_1, \dots, a_{2m}]_q$  donnée par (3.1) est une fonction rationnelle bien définie en  $q$ . On a*

$$[a_1, \dots, a_{2m}]_q = \frac{\mathcal{R}^+}{\mathcal{S}^+},$$

où  $\mathcal{R}^+$  et  $\mathcal{S}^+$  sont des polynômes dans  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$  donnés par la matrice

$$M_q^+(a_1, \dots, a_{2m}) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^+ & * \\ \mathcal{S}^+ & * \end{pmatrix}.$$

(ii) Soit  $c_1, \dots, c_k$  une suite d'entiers telle que  $\llbracket c_1, c_2, \dots, c_k \rrbracket_q$  donnée par (3.2) est une fonction rationnelle bien définie en  $q$ . On a

$$\llbracket c_1, c_2, \dots, c_k \rrbracket_q = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}},$$

où  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont des polynômes dans  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$  donnés par la matrice

$$M_q(c_1, c_2, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} \mathcal{R} & * \\ \mathcal{S} & * \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.2.8.** Cette proposition a été prouvé dans [45] pour un choix particulier de coefficients  $a_i$  et  $c_i$ . Ce résultat plus général est l'étape clé de la preuve du Théorème .

Enfin, nous pouvons donner une expression permettant de relier  $M_q(c_1, c_2, \dots, c_k)$  et  $M_q^+(a_1, \dots, a_{2m})$ .

**Proposition 3.2.9** ([45]). Si  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2m}] = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$ , alors les matrices  $q$ -déformées des fractions continues satisfont

$$M_q^+(a_1, \dots, a_{2m}) = M_q(c_1, \dots, c_k)R_q.$$

### 3.2.4 Transformation de Möbius des $q$ -rationnels

Le groupe modulaire  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  agit sur la droite réelle projective par l'intermédiaire des transformations de Möbius :

$$M \cdot x := \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \forall x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}).$$

Nous considérons l'action  $q$ -analogue de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{PSL}_q(2, \mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{Q}(q) \cup \{\infty\}$  :

$$M \cdot f := \frac{Af + B}{Cf + D}, \quad \forall f \in \mathbb{Q}(q) \cup \{\infty\}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_q(2, \mathbb{Z}).$$

**Proposition 3.2.10.** Les actions  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  commutent avec les  $q$ -déformations.

*Démonstration.* Nous voulons montrer que  $[M \cdot x]_q = [M]_q \cdot [x]_q$ . Il suffit de considérer les cas  $M = R$  et  $M = S$ , pour lesquels on sait que les égalités tiennent grâce aux relations () et ().  $\square$

Ce résultat sera étendu aux  $q$ -réels dans le Chapitre (Théorème ).

### 3.2.5 Preuve du Théorème

Soit  $\frac{r}{s}$  un rationnel défini à partir des suites d'entiers  $a_1, \dots, a_{2m}$  et  $c_1, \dots, c_k$  par les fractions continues (2.1) et (2.2) respectivement, c'est-à-dire  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2m}]$ . Soit  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2m}] = \llbracket c_1, c_2, \dots, c_k \rrbracket$ . On considère les fractions continues  $q$ -déformées (3.1) et (3.2) et on écrit

$$[a_1, \dots, a_{2m}]_q = \frac{\mathcal{R}^+}{\mathcal{S}^+}, \quad \llbracket c_1, c_2, \dots, c_k \rrbracket_q = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}.$$

On veut montrer que  $[a_1, \dots, a_{2m}]_q = \llbracket c_1, c_2, \dots, c_k \rrbracket_q$ .

Par le Lemme , nous savons que le rapport des premières colonnes des matrices  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  et  $M(c_1, c_2, \dots, c_k)$  donne le rationnel  $\frac{r}{s}$ . Comme les matrices appartiennent à  $SL(2, \mathbb{Z})$  et que le rationnel  $\frac{r}{s}$  s'écrit sous la forme irréductible, on peut écrire

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = \begin{pmatrix} r & u \\ s & v \end{pmatrix}, \quad M(c_1, c_2, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} r & u' \\ s & v' \end{pmatrix}.$$

Puisque  $rv - su = rv' - su' = 1$  on a  $u' = u + nr$  et  $v' = v + ns$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Ceci implique la relation suivante sur les matrices

$$M(c_1, c_2, \dots, c_k) = M^+(a_1, \dots, a_{2m})R^n.$$

En appliquant la  $q$ -déformation des matrices (3.9) dans l'identité ci-dessus et en utilisant la Proposition , on obtient

$$\begin{aligned} [M(c_1, c_2, \dots, c_k)]_q &= [M^+(a_1, \dots, a_{2m})]_q [R^n]_q \\ \begin{pmatrix} \mathcal{R} & * \\ \mathcal{S} & * \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}^+ & * \\ \mathcal{S}^+ & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^n & [n]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathcal{R} & * \\ \mathcal{S} & * \end{pmatrix} &= q^n \begin{pmatrix} \mathcal{R}^+ & * \\ \mathcal{S}^+ & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit  $[[c_1, c_2, \dots, c_k]]_q = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = \frac{\mathcal{R}^+}{\mathcal{S}^+} = [a_1, \dots, a_{2m}]_q$ . Le Théorème est démontré.

### 3.3 Trace des $q$ -matrices

Nous avons effectué à l'aide d'un programme informatique de nombreux calculs de  $q$ -déformations de matrices de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  et nous avons souhaité observer les traces de ces matrices. Nos observations nous ont conduites au résultat principal qui est le théorème suivant (l'objectif de cette section sera de le démontrer).

**Théorème 3.3.1.** *Les traces des éléments dans  $PSL_q(2, \mathbb{Z})$  sont des polynômes palindromes dans  $\mathbb{Z}[q]$  à coefficients entiers positifs, modulo un facteur multiplicatif  $\pm q^N$ .*

#### 3.3.1 Preuve du Théorème

La suite de lettres  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$  est un palindrome si elle se lit de la même manière vers l'arrière et vers l'avant, c'est-à-dire  $\alpha_1 = \alpha_n, \alpha_2 = \alpha_{n-1}$ , etc. Un polynôme  $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  est dit être un palindrome, ou avoir des coefficients palindromes, si sa suite de coefficients ordonnés est un palindrome. Cela signifie que  $\mathcal{P}$  est un palindrome si et seulement si  $\mathcal{P}(q) = q^N \mathcal{P}(q^{-1})$  pour un entier  $N \in \mathbb{Z}$ .

La preuve du Théorème s'appuie sur trois résultats intermédiaires que nous formulons sous forme de lemmes.

**Lemme 3.3.2.** *Pour toute suite d'entiers  $c_1, c_2, \dots, c_k$  on a :*

$$\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k) = \text{Tr } M_q(c_k, c_{k-1}, \dots, c_1).$$

La preuve du Lemme est reportée au §.

**Lemme 3.3.3.** *Pour toute suite d'entiers  $c_1, c_2, \dots, c_k$  le polynôme de  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  donné par la trace  $\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k)$  est un palindrome.*

*Démonstration.* En utilisant la transposition matricielle dans la matrice (i) de la Proposition , on voit que

$$M_q(c_k, c_{k-1}, \dots, c_1) = q^{\sum_{i=1}^k (c_i - 1)} M_{q^{-1}}(c_1, c_2, \dots, c_k)$$

En combinant cette identité avec le Lemme on en déduit l'égalité

$$\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k) = q^{\sum_{i=1}^k (c_i - 1)} \text{Tr } M_{q^{-1}}(c_1, c_2, \dots, c_k),$$

ce qui dit exactement que le polynôme  $\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k)$  est un palindrome. □

**Lemme 3.3.4.** *Pour toute suite d'entiers positifs  $c_1, c_2, \dots, c_k$  avec  $c_1, \dots, c_{k-1}$  supérieur à 2, le polynôme de  $\mathbb{Z}[q]$  donné par la trace  $\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k)$  a des coefficients positifs.*

La preuve du Lemme est reportée au §.

Soit  $M$  un élément de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Puisque l'élément  $[M]_q$  de  $\text{PSL}_q(2, \mathbb{Z})$  est une classe modulo  $\pm q^N \text{Id}$ , la trace de  $[M]_q$  est un polynôme ayant éventuellement en facteur  $\pm q^N$ . Nous savons que chaque élément de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  peut être décomposé en  $M(c_1, \dots, c_k)$  pour une suite (non unique) d'entiers  $c_i$ . En effet, pour les générateurs on obtient les expressions

$$R = -M(2, 1, 1), \quad R^{-1} = -M(1, 1, 2, 1), \quad S = -S^{-1} = -M(1, 1, 2, 1, 1),$$

De plus, il a été prouvé dans [43] qu'il existe une décomposition où les coefficients sont tous supérieurs à deux sauf peut-être le premier et le dernier comme l'indique la Proposition .

Comme la trace de la matrice  $M_q(c_1, \dots, c_k)$  est invariante sous une permutation cyclique des coefficients  $c_i$  et que  $M_q(1, 1, 1) = -\text{Id}$ . La Proposition implique que la trace de  $[M]_q$  est égale, à un facteur près  $\pm q^N$ , à la trace d'une matrice  $M_q(c_1, \dots, c_k)$  avec  $c_1, \dots, c_{k-1}$  supérieur à 2. Le Lemme implique donc à son tour que les coefficients de  $\text{Tr } [M]_q$  sont des entiers positifs. De plus, le Lemme indique que ces coefficients forment une suite palindrome. Ceci établira le Théorème .

De plus, nous avons formulé la conjecture suivante, qui s'avère fausse dans un cas particulier de coefficients mais démontrée vraie en général [50].

**Conjecture 3.3.5.** *Pour toute suite d'entiers  $c_1, c_2, \dots, c_k$  le polynôme de  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  donné par  $\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k)$  a une suite unimodale de coefficients.*

### 3.3.2 Preuve du Lemme

Nous procédons par récurrence. On commence par énoncer des relations utiles sur les matrices  $M_q(c_1, c_2, \dots, c_k)$  et leurs traces qui permettent quelques réductions sur la suite des coefficients.

**Lemme 3.3.6.** *Pour tous les entiers  $c_1, c_2, \dots, c_k, c$  et  $d$  on a*

$$(i) \quad M_q(c_1, \dots, c, 1, d, \dots, c_k) = q M_q(c_1, \dots, c-1, d-1, \dots, c_k);$$

$$(ii) \quad M_q(c_1, \dots, c, -1, d, \dots, c_k) = -q^{-2} M_q(c_1, \dots, c+1, d+1, \dots, c_k);$$

$$(iii) \quad \text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, 0) = -q^{-1} \text{Tr } M_q(c_1 + c_k, c_2, \dots, c_{k-1}),$$

$$(iv) \quad \text{Tr } M_q(0, c_1, c_2, \dots, c_k) = -q^{-1} \text{Tr } M_q(c_1 + c_k, c_2, \dots, c_{k-1}).$$

*Démonstration.* Les points (i) et (ii) découlent des identités  $M_q(c, 1, d) = qM_q(c-1, d-1)$  et  $M_q(c, -1, d) = -q^{-2}M_q(c+1, d+1)$  qui peuvent être vérifiés par des calculs matriciels directs. Pour le point (iii) nous utilisons la décomposition de la Proposition et nous écrivons

$$M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, 0) = R_q^{c_1} S_q R_q^{c_2} S_q \cdots R_q^{c_k} \underbrace{S_q R_q^0 S_q}_{-q^{-1}\text{Id}} = -q^{-1} M_q(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}) R_q^{c_k}.$$

En prenant la trace nous obtenons

$$\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, 0) = -q^{-1} \text{Tr } (M_q(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}) R_q^{c_k}) = -q^{-1} \text{Tr } M_q(c_1 + c_k, c_2, \dots, c_{k-1}),$$

ce qui donne (iii). La trace est invariante par permutation cyclique des facteurs donc  $\text{Tr } M_q(0, c_1, c_2, \dots, c_k) = \text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, 0)$  et (iv) est également vérifié.  $\square$

Pour prouver le Lemme, nous considérons l'hypothèse de récurrence suivante :

(H) :  $\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k) = \text{Tr } M_q(c_k, c_{k-1}, \dots, c_1)$ , pour toute suite d'entiers  $c_1, c_2, \dots, c_k$ .

La propriété (H) est claire pour  $k = 2$ , puisque  $M_q(c_1, c_2) = M_q(c_1)M_q(c_2)$ .

Nous supposons maintenant que (H) est vérifiée jusqu'à un  $k \geq 2$  fixe.

Considérons la suite d'entiers  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  et introduisons la notation pour les entrées des matrices

$$M_q(c_1, c_2, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad M_q(c_k, c_{k-1}, \dots, c_1) = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

Nous avons besoin des calculs préliminaires suivants :

$$\begin{aligned} M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, c) &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [c]_q & -q^{c-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [c]_q A + B & -q^{c-1} A \\ [c]_q C + D & -q^{c-1} C \end{pmatrix} \\ M_q(c, c_k, c_{k-1}, \dots, c_1) &= \begin{pmatrix} [c]_q & -q^{c-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [c]_q \bar{A} - q^{c-1} \bar{C} & [c]_q \bar{B} - q^{c-1} \bar{D} \\ \bar{A} & \bar{B} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $c$  est un entier quelconque.

D'après l'hypothèse de récurrence (H) on a la relation suivante entre les entrées des matrices (3.12) :

$$A + D = \bar{A} + \bar{D}.$$

**Étape 1.** On montre qu'en plus on a la relation suivante dans les matrices (3.12) :

$$C - qB = \bar{C} - q\bar{B}. \quad (3.14)$$

En utilisant (3.13) avec  $c = 0$  nous voyons que

$$C - qB = -q \text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, 0) \quad \text{and} \quad \bar{C} - q\bar{B} = -q \text{Tr } M_q(0, c_k, c_{k-1}, \dots, c_1).$$

L'égalité entre ces deux s'obtient à l'aide du Lemme (iii) qui permet de réduire la longueur du cycle des coefficients puis en appliquant (H).

**Étape 2.** On montre qu'en plus on a la relation suivante dans les matrices (3.12) :

$$A + B - C = \bar{A} + \bar{B} - \bar{C} \quad (3.15)$$

En utilisant (3.13) avec  $c = 1$  nous voyons que

$$A + B - C = \text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, 1), \quad \bar{A} + \bar{B} - \bar{C} = \text{Tr } M_q(1, c_k, c_{k-1}, \dots, c_1).$$

L'invariance de la trace par permutations cycliques et le Lemme (i) donnent d'une part

$$\begin{aligned} \text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, 1) &= \text{Tr } M_q(c_2, \dots, c_k, 1, c_1) \\ &= q \text{Tr } M_q(c_2, \dots, c_k - 1, c_1 - 1) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \text{Tr } M_q(1, c_k, c_{k-1}, \dots, c_1) &= \text{Tr } M_q(c_1, 1, c_k, c_{k-1}, \dots, c_2) \\ &= q \text{Tr } M_q(c_1 - 1, c_k - 1, c_{k-1}, \dots, c_2) \end{aligned}$$

En appliquant de nouveau (H) on obtient (3.15).

**Étape 3.** Nous voulons montrer :

$$\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1}) = \text{Tr } M_q(c_{k+1}, c_k, c_{k-1}, \dots, c_1), \quad (3.16)$$

On procède par récurrence sur l'entier  $c_{k+1} \geq 0$ . Les cas  $c_{k+1} = 0$  et  $c_{k+1} = 1$  ont été établis aux étapes 1 et 2. Nous supposons alors que () est valable pour  $c_{k+1} = c > 0$ . Avec (3.13) nous avons la relation :

$$[c]_q A + B - q^{c-1} C = [c]_q \bar{A} + \bar{B} - q^{c-1} \bar{C}. \quad (3.17)$$

Maintenant on calcule

$$\begin{aligned} \text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, c+1) &= [c+1]_q A + B - q^c C \\ &= q[c]_q A + A + B - q^c C \\ &= (q[c]_q A + qB - q^c C) + (A + B - C) + (C - qB) \\ &= (q[c]_q \bar{A} + q\bar{B} - q^c \bar{C}) + (\bar{A} + \bar{B} - \bar{C}) + (\bar{C} - q\bar{B}) \\ &= [c+1]_q \bar{A} + \bar{B} - q^c \bar{C} \\ &= \text{Tr } M_q(c+1, c_k, c_{k-1}, \dots, c_1), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé  $[c+1]_q = q[c]_q + 1$  et toutes les relations (3.17), (3.15), (3.14).

A ce stade, nous avons prouvé que () est valable pour tout  $c_{k+1} \geq 0$ . Le cas avec  $c_{k+1} \leq 0$  s'établirait de la même manière. Nous faut remplacer la relation de l'étape 2 par celle donnée par l'identité

$$\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, -1) = \text{Tr } M_q(-1, c_k, c_{k-1}, \dots, c_1)$$

que l'on obtient grâce au Lemme (ii). Et puis nous procédons à l'étape 3 par une récurrence décroissante sur l'entier  $c_{k+1} < 0$  en utilisant la relation  $[c-1] = q^{-1}[c] - q^{-1}$ .

### 3.3.3 Preuve du Lemme

Nous allons imiter la preuve du Lemme . L'hypothèse de récurrence est maintenant

(H') :  $\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k)$  est un polynôme avec des coefficients entiers positifs pour toute suite d'entiers positifs  $c_1, c_2, \dots, c_k$  avec  $c_i \geq 2, \forall i < k$ .

La propriété (H') peut être vérifiée par calculs directs pour  $k = 1$  et  $k = 2$ .

On procède comme dans la preuve du Lemme . A l'étape 1, nous obtenons

$$C - qB \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q].$$

A l'étape 2, nous obtenons

$$A + B - C \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q].$$

À l'étape 3, en supposant

$$\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, c) = [c]A + B - q^{c-1}C \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q],$$

on pourra en déduire avec le même calcul

$$\text{Tr } M_q(c_1, c_2, \dots, c_k, c+1) = [c+1]A + B - q^c C \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q].$$

Ceci établit (H') par récurrence.

**Remarque 3.3.7.** Dans les preuves des lemmes et nous avons établi des propriétés sur les entrées des matrices  $M_q(c_1, c_2, \dots, c_k)$  qui se traduisent comme suit dans termes des  $q$ -continuants

$$\begin{aligned} E_k(c_1, c_2, \dots, c_k)_q - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q &= E_k(c_k, c_{k-1}, \dots, c_1)_q - q^{c_1-1} E_{k-2}(c_{k-1}, \dots, c_2)_q \\ E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q - q^{c_k} E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q &= E_{k-1}(c_{k-1}, \dots, c_1)_q - q^{c_1} E_{k-1}(c_k, \dots, c_2)_q \end{aligned}$$

De plus, ces polynômes sont des palindromes et lorsque  $c_1, c_2, \dots, c_k$  sont des entiers positifs ils ont des coefficients entiers positifs.

### 3.3.4 Exemples : matrices de Cohn

On considère les 2 matrices de  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -M(2, 2, 1, 1), \quad B := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -M(3, 2, 2, 1, 1).$$

Ces matrices et leurs produits selon les mots de Christoffel fournissent tous les nombres de Markov, voir par ex. [60]. Toutes ces matrices sont également appelées matrices de Cohn. Les nombres de Markov apparaissent deux fois dans les matrices, comme les entrées dans le coin supérieur droit ainsi que le tiers des traces des matrices. Les  $q$ -déformations de ces matrices conduisent à des  $q$ -analogues des nombres de Markov. Nous calculons les  $q$ -déformations des premières matrices de Cohn.

$$[A]_q = \begin{pmatrix} q + q^2 & 1 \\ q & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Tr } [A]_q = 1 + q + q^2$$

$$[B]_q = \begin{pmatrix} q + 2q^2 + q^3 + q^4 & 1 + q \\ q + q^2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Tr } [B]_q = (1 + q + q^2)(1 + q^2)$$

$$[AB]_q = \begin{pmatrix} q + 2q^2 + 3q^3 + 3q^4 + 2q^5 + q^6 & 1 + q + 2q^2 + q^3 \\ q + 2q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5 & 1 + q + q^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \text{Tr}[AB]_q = (1 + q + q^2)(1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$$

$$[A^2B]_q = \begin{pmatrix} q + 3q^2 + 5q^3 + 6q^4 + 7q^5 + 5q^6 + 3q^7 + q^8 & 1 + 2q + 3q^2 + 3q^3 + 3q^4 + q^5 \\ q + 3q^2 + 4q^3 + 4q^4 + 4q^5 + 2q^6 + q^7 & 1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + q^4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \text{Tr}[A^2B]_q = (1 + q + q^2)(1 + 2q + 2q^2 + 3q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6)$$

$$[AB^2]_q = \begin{pmatrix} q + 3q^2 + 7q^3 + 11q^4 + 13q^5 + 13q^6 + 11q^7 + 7q^8 + 3q^9 + q^{10} & 1 + 2q + 5q^2 + 6q^3 + 6q^4 + 5q^5 + 3q^6 + q^7 \\ q + 3q^2 + 6q^3 + 8q^4 + 8q^5 + 7q^6 + 5q^7 + 2q^8 + q^9 & 1 + 2q + 4q^2 + 4q^3 + 3q^4 + 2q^5 + q^6 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \text{Tr}[AB^2]_q = (1 + q + q^2)(1 + 2q + 4q^2 + 5q^3 + 5q^4 + 5q^5 + 4q^6 + 2q^7 + q^8)$$

$$[A^3B]_q = \begin{pmatrix} q + 4q^2 + 8q^3 + 12q^4 + 15q^5 + 15q^6 + 13q^7 + 8q^8 + 4q^9 + q^{10} & 1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + 7q^4 + 6q^5 + 4q^6 + q^7 \\ q + 4q^2 + 7q^3 + 9q^4 + 10q^5 + 9q^6 + 6q^7 + 3q^8 + q^9 & 1 + 3q + 4q^2 + 5q^3 + 4q^4 + 3q^5 + q^6 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \text{Tr}[A^3B]_q = (1 + q + q^2)(1 + q^2)(1 + 3q + 3q^2 + 3q^3 + 3q^4 + 3q^5 + q^6)$$

On observe que les traces de ces matrices sont toujours divisibles par  $[3]_q$ . Notez que la même approche des  $q$ -déformations des matrices de Cohn basées sur les  $q$ -rationnels a été introduite dans [33]. Nos calculs coïncident à une puissance de  $q$  près en raison des déformations initiales différentes des matrices  $A$  et  $B$ . Notons que ces matrices interviennent dans une étude approfondie sur les  $q$ -nombres de Markov (voir [36]), ou encore pour étudier une  $q$ -version de la conjecture d'injectivité de Markov (voir [37]).

### 3.4 Introduction des continuants $q$ -déformés

Il s'agit dans cette section de donner une  $q$ -version des continuants qui ont été définis dans la Section (se référer à cette partie pour plus de détails les concernant). Nous allons voir que ces  $q$ -continuants sont des objets très intéressants que l'on va retrouver dans les  $q$ -déformations des développements en fractions continues introduits dans le §, ainsi que dans les entrées des  $q$ -matrices des convergents introduites dans le §. Commençons par définir les  $q$ -continuants.

Nous appelons  $q$ -continuants les déterminants suivants

$$E_k(c_1, \dots, c_k)_q := \begin{vmatrix} [c_1]_q & q^{c_1-1} & & & \\ & 1 & [c_2]_q & q^{c_2-1} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & [c_{k-1}]_q & q^{c_{k-1}-1} \\ & & & & 1 & [c_k]_q \end{vmatrix}, \quad (3.18)$$



**Proposition 3.4.2.** Soient  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(c_1, \dots, c_k)$  des uplets d'entiers positifs, on a

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]_q = [a_1]_q + \frac{q^{a_1}}{[a_2]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_2}}{[a_3]_q + \frac{q^{a_3}}{[a_4]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_4}}{\dots + \frac{q^{\pm 1}}{[a_n]_q}}}}} = \frac{K_n(a_1, \dots, a_n)_q}{K_{n-1}(a_2, \dots, a_n)_q}$$

$$[[c_1, c_2, \dots, c_k]]_q = [c_1]_q - \frac{q^{c_1-1}}{[c_2]_q - \frac{q^{c_2-1}}{\dots - \frac{q^{c_{k-1}-1}}{[c_k]_q}}} = \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)_q}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q}.$$

Nous les retrouvons également dans les entrées des matrices des convergents définies dans le §.

**Proposition 3.4.3.** (i) Soit  $(c_1, \dots, c_k)$  des entiers positifs. On a

$$M_q(c_1, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} E_k(c_1, \dots, c_k)_q & -q^{c_k-1} E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q \\ E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q & -q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q \end{pmatrix}.$$

(ii) Soit  $(a_1, \dots, a_{2m})$  des entiers positifs. On a

$$M_q^+(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} qK_n(a_1, \dots, a_n)_q & \widetilde{K}_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})_q \\ qK_{n-1}(a_2, \dots, a_n)_q & \widetilde{K}_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1})_q \end{pmatrix}$$

où la notation  $\widetilde{K}$  représente le polynôme miroir, c'est-à-dire celui avec la suite inversée de coefficients.

**Exemple 3.4.4.** Pour  $n = 4$ , considérons la suite  $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 1, 1, 1)$ .

$$M(2, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M_q^+(2, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} q^5 + 2q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q & q^3 + q^2 + 2q + 1 \\ q^3 + q^2 + q & q + 1 \end{pmatrix}$$

$$K_4(2, 1, 1, 1)_q = q^{1+1-1} \begin{vmatrix} [2]_q & q^2 & 0 & 0 \\ -1 & [1]_{q^{-1}} & q^{-1} & 0 \\ 0 & -1 & [1]_q & q \\ 0 & 0 & -1 & [1]_{q^{-1}} \end{vmatrix} = q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 2q + 1$$

$$K_3(1, 1, 1)_q = q^{1+1-1} \begin{vmatrix} [1]_{q^{-1}} & q^{-1} & 0 \\ -1 & [1]_q & q \\ 0 & -1 & [1]_{q^{-1}} \end{vmatrix} = q^2 + q + 1$$

$$K_3(2, 1, 1)_q = q^{2+1-1} \begin{vmatrix} [2]_{q^{-1}} & q^{-2} & 0 \\ -1 & [1]_q & q \\ 0 & -1 & [1]_{q^{-1}} \end{vmatrix} = q^3 + 2q^2 + q + 1 \text{ donc } \widetilde{K}_3(2, 1, 1)_q = q^3 + q^2 + 2q + 1$$

$$K_2(1, 1)_q = q^{1-1} \begin{vmatrix} [1]_q & q \\ -1 & [1]_{q^{-1}} \end{vmatrix} = q + 1 \text{ donc } \widetilde{K}_2(1, 1)_q = q + 1$$

Ceci coïncide bien avec le (ii) de la Proposition .

En combinant la proposition ci-dessus avec la Proposition , on obtient les formules suivantes pour les numérateurs et les dénominateurs des  $q$ -rationnels.

**Proposition 3.4.5.** Si  $[\frac{r}{s}]_q = [a_1, \dots, a_{2m}]_q = \llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket_q = \frac{\mathcal{R}(q)}{\mathcal{S}(q)}$ , alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(q) &= E_k(c_1, \dots, c_k)_q = qK_{2m}(a_1, \dots, a_{2m})_q, \\ \mathcal{S}(q) &= E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q = qK_{2m-1}(a_2, \dots, a_{2m})_q. \end{aligned}$$

**Remarque 3.4.6.** En calculant  $M_q(c_1, \dots, c_k)^{-1}$  on obtient facilement la "formule miroir" :

$$E_k(c_1, \dots, c_k)_q = q^{c_1 + \dots + c_k - k} E_k(c_k, \dots, c_1)_{q^{-1}}.$$

### 3.5 Deux exemples de suites : $q$ -nombres de Fibonacci et $q$ -nombres de Pell

Dans cette section, nous considérons les  $q$ -analogues de deux exemples de suites de rationnels qui ont été étudiés dans [45].

**A** La suite de convergents de la fraction continue infinie la plus simple représentant le nombre d'or  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, \dots]$ . Plus précisément, nous avons  $\frac{r_n}{s_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ , où  $F_n$  est le  $n^{\text{ème}}$  nombre de Fibonacci.

**B** La suite de convergents de la fraction continue  $1 + \sqrt{2} = [2, 2, 2, 2, \dots]$  appelé le "rapport d'argent". Voici les ratios de nombres de Pell consécutifs :  $\frac{r_n}{s_n} = \frac{P_{n+1}}{P_n}$  (rappelons que la suite  $(P_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \dots)$  est A000129 de OEIS).

Les calculs ont été menés selon la Définition . Il s'avère que la  $q$ -déformation des nombres de Fibonacci au dénominateur est la suite bien connue A079487, tandis que la  $q$ -déformation des nombres de Fibonacci au numérateur se trouve être la suite "miroir" A123245 d'OEIS. Étonnamment, la  $q$ -déformation des nombres de Pell semble donner une nouvelle version.

#### 3.5.1 Suite A079487 et son miroir A123245

Considérons le triangle infini d'entiers positifs  $(f_{i,j})_{i \geq 2, j \geq 0}$ , avec les conditions initiales  $f_{2,0} = f_{3,0} = f_{3,1} = 1$  et la convention  $f_{i,j} = 0$ , pour  $j < 0$ , et défini par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} f_{2i+1,j} &= f_{2i,j-1} + f_{2i-1,j}, \\ f_{2i+2,j} &= f_{2i+1,j} + f_{2i,j-2}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

pour  $i \geq 1$ . La somme des nombres de la  $i^{\text{ème}}$  ligne est égale au nombre de Fibonacci  $F_{i+1}$ .

La suite A123245 est le *miroir* de A079487, c'est-à-dire qu'il s'agit du triangle A079487 avec les lignes inversées. En utilisant la notation  $(\tilde{f}_{i,j})_{i \geq 2, j \geq 0}$ , la récurrence pour A123245 est la même

que (3.23) avec la parité échangée :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2i+2,j} &= \tilde{f}_{2i+1,j-1} + \tilde{f}_{2i,j}, \\ \tilde{f}_{2i+1,j} &= \tilde{f}_{2i,j} + \tilde{f}_{2i-1,j-2}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

pour  $i \geq 1$ .

Les triangles A079487 et A123245 commencent ainsi

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 7 & 5 & 3 & 1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 7 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 11 & 10 & 7 & 4 & 1 & 1 & 4 & 7 & 10 & 11 & 10 & 7 & 4 & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

Considérons les polynômes

$$\mathcal{F}_{n+1}(q) := \sum_{0 \leq i \leq n-1} f_{n+1,i} q^i \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}_{n+1}(q) := \sum_{0 \leq i \leq n-1} \tilde{f}_{n+1,i} q^i. \quad (3.25)$$

Les deux suites de polynômes  $\mathcal{F}_n(q)$  et  $\tilde{\mathcal{F}}_n(q)$  sont de degré  $n - 2$  (pour  $n \geq 2$ ) et sont des miroirs l'un de l'autre :

$$\tilde{\mathcal{F}}_n(q) = q^{n-2} \mathcal{F}_n(q^{-1}).$$

Les récurrences (3.23) et (3.24) donnent alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2\ell+1} &= q\mathcal{F}_{2\ell} + \mathcal{F}_{2\ell-1}, & \tilde{\mathcal{F}}_{2\ell+1} &= \tilde{\mathcal{F}}_{2\ell} + q^2\tilde{\mathcal{F}}_{2\ell-1}, \\ \mathcal{F}_{2\ell+2} &= \mathcal{F}_{2\ell+1} + q^2\mathcal{F}_{2\ell}, & \tilde{\mathcal{F}}_{2\ell+2} &= q\tilde{\mathcal{F}}_{2\ell+1} + \tilde{\mathcal{F}}_{2\ell}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

pour  $\ell \geq 1$ , respectivement.

Les polynômes  $\mathcal{F}_n(q)$  peuvent être calculés récursivement. Il sera commode de séparer cette suite de polynômes en deux sous-suites, avec un nombre pair  $n$  et un nombre impair  $n$ . Ces deux suites satisfont la même récurrence, qui est un  $q$ -analogue de la récurrence classique

$$F_{n+2} = 3F_n - F_{n-2}$$

pour les nombres de Fibonacci.

Les deux relations de (3.26) nous permettent d'énoncer le résultat suivant.

**Proposition 3.5.1.** *Les polynômes  $\mathcal{F}_n(q)$  sont déterminés par la récurrence*

$$\mathcal{F}_{n+2}(q) = [3]_q \mathcal{F}_n(q) - q^2 \mathcal{F}_{n-2}(q), \quad (3.27)$$

où  $[3]_q = 1 + q + q^2$ , et les conditions initiales

$$(\mathcal{F}_0(q) = 0, \mathcal{F}_2(q) = 1) \quad \text{et} \quad (\mathcal{F}_1(q) = 1, \mathcal{F}_3(q) = 1 + q).$$

### 3.5.2 $q$ -déformation du rapport des nombres de Fibonacci

Il s'avère que les polynômes résultant des  $q$ -déformations de la suite  $\frac{F_{n+1}}{F_n}$  coïncident avec les polynômes (3.25). Plus précisément, on a ce qui suit.

**Proposition 3.5.2.** On a  $\left[\frac{F_{n+1}}{F_n}\right]_q = \frac{\tilde{F}_{n+1}(q)}{\mathcal{F}_n(q)}$ .

*Démonstration.* Les relations (3.26) sont exactement les relations (2.10) dans le cadre des nombres de Fibonacci. Le résultat est donc immédiat.  $\square$

Calculons les 4 premiers rapports des nombres de Fibonacci.

**Exemple 3.5.3.** On a

$$\begin{aligned} \left[\frac{5}{3}\right]_q &= \frac{1 + q + 2q^2 + q^3}{1 + q + q^2}, \\ \left[\frac{8}{5}\right]_q &= \frac{1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + q^4}{1 + 2q + q^2 + q^3}, \\ \left[\frac{13}{8}\right]_q &= \frac{1 + 2q + 3q^2 + 3q^3 + 3q^4 + q^5}{1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + q^4}, \\ \left[\frac{21}{13}\right]_q &= \frac{1 + 3q + 4q^2 + 5q^3 + 4q^4 + 3q^5 + q^6}{1 + 3q + 3q^2 + 3q^3 + 2q^4 + q^5}, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

### 3.5.3 Une $q$ -déformation des nombres de Pell

L'irrationnel  $[\sqrt{2} + 1]_q$  peut être approximé par le quotient des nombres de Pell consécutifs :  $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \underbrace{[2, 2, \dots, 2]}_n$ .

On définit les polynômes  $\mathcal{P}_n(q)$  selon les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2\ell+1} &= (q + q^2) \mathcal{P}_{2\ell} + \mathcal{P}_{2\ell-1}, \\ \mathcal{P}_{2\ell+2} &= (1 + q) \mathcal{P}_{2\ell+1} + q^4 \mathcal{P}_{2\ell}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

avec les conditions initiales

$$(\mathcal{P}_0(q) = 0, \mathcal{P}_2(q) = 1 + q) \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_{-1}(q) = \mathcal{P}_1(q) = 1).$$

Nous noterons  $\tilde{\mathcal{P}}_n(q)$  le polynôme miroir de  $\mathcal{P}_n(q)$ , il vérifie des relations de récurrences similaires :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{2\ell+1} &= (1 + q) \tilde{\mathcal{P}}_{2\ell} + q \tilde{\mathcal{P}}_{2\ell-1}, \\ \tilde{\mathcal{P}}_{2\ell+2} &= (q + q^2) \tilde{\mathcal{P}}_{2\ell+1} + \tilde{\mathcal{P}}_{2\ell}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

**Remarque 3.5.4.** Les polynômes  $\tilde{\mathcal{P}}_n(q)$  et  $\mathcal{P}_n(q)$  sont de degré  $2n-3$  et, comme les polynômes de Fibonacci, sont les miroirs l'un de l'autre et vérifient donc la relation suivante :  $q^{2n-3} \tilde{\mathcal{P}}_n(q^{-1}) = \mathcal{P}_n(q)$ .

Des relations (3.28), on en déduit la proposition suivante.



# Chapitre 4

## $q$ -réels

Les  $q$ -réels ont été introduits dans [44]. Ce sont des séries de Laurent à coefficients entiers obtenus comme limites de  $q$ -rationnels. Dans notre article [38], nous avons poursuivi l'étude de ces  $q$ -réels et plus particulièrement nous nous sommes intéressées aux  $q$ -irrationnels quadratiques. Nous montrons d'abord que l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sur la droite réelle commute avec les  $q$ -déformations (Théorème ). Ceci permet d'obtenir des formules explicites pour les  $q$ -déformations des irrationnels quadratiques (Proposition ). Nous nous intéressons ensuite aux séries de Laurent de  $q$ -réels en considérant  $q$  comme une variable complexe. Se pose la question du rayon de convergence de ces séries. Nous étudions ces questions dans notre article [40] et nous formulons une conjecture donnant une borne inférieure pour ces rayons de convergence (Conjecture ). Nous prouvons la conjecture dans le cas des nombres rationnels et des irrationnels quadratiques sous certaines restrictions sur les coefficients dans les développements en fractions continues (Théorèmes et ). En levant les restrictions nous obtenons une borne sur le rayon de convergence plus petite que la borne minimale conjecturale (Théorèmes et ).

### 4.1 Définition et théorème de stabilisation

#### 4.1.1 Construction

Nous rappelons brièvement que la  $q$ -déformation d'un nombre rationnel  $\frac{r}{s}$  est un quotient de deux polynômes :

$$\left[ \frac{r}{s} \right]_q = \frac{\mathcal{R}(q)}{\mathcal{S}(q)},$$

où  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  dépendent tous deux de  $r$  et  $s$  (voir chapitre ).

Dans ce chapitre, nous considérons les développements de ces fonctions rationnelles en séries entières (séries de Taylor en  $q = 0$ ). Partant d'une suite de rationnels convergeant vers un nombre réel, on constate qu'il existe un phénomène de stabilisation des séries entières correspondantes aux éléments de cette suite. Ceci permet de définir les  $q$ -réels.

**Définition 4.1.1.** ([44]) Soit  $x > 1$  un nombre irrationnel, et  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres rationnels qui converge vers  $x$ . Nous  $q$ -déformons la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  pour obtenir une suite de fonctions rationnelles :  $[x_1]_q, [x_2]_q, [x_3]_q, \dots$ . Pour chaque  $n \geq 1$ , nous considérons le développement de Taylor de la fonction rationnelle  $[x_n]_q$  en  $q = 0$  :

$$[x_n]_q = \sum_{k \geq 0} \varkappa_{n,k} q^k. \quad (4.1)$$

La  $q$ -déformation du réel  $x$  est la série

$$[x]_q := \sum_{k \geq 0} \varkappa_k q^k, \quad \text{où} \quad \varkappa_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \varkappa_{n,k}. \quad (4.2)$$

L'existence de la limite et son indépendance du choix de la suite convergente  $(x_n)_{n \geq 1}$  est garanti par le théorème suivant.

**Théorème 4.1.2** ([44]). *Étant donné un nombre réel irrationnel  $x > 1$ , pour chaque  $k \geq 0$ , les coefficients  $\varkappa_{n,k}$  de la série de Taylor (4.1) se stabilisent à mesure que  $n$  grandit. De plus, les coefficients limites  $\varkappa_k$  dans (4.2) sont des entiers qui ne dépendent pas du choix de la suite convergente de rationnels  $(x_n)_{n \geq 1}$ .*

Cette affirmation a été observée pour la première fois par des expérimentations informatiques, mais ensuite une preuve simple a été trouvée (voir de nouveau [44] §3.3). Il faut cependant remarquer dans cette construction, que les coefficients des polynômes au numérateur et au dénominateur de la suite de fonctions rationnelles  $[x_n]_q$  ne se stabilise pas. Ils grandissent avec  $n$  à l'infini à chaque puissance fixe de  $q$ .

**Exemple 4.1.3.** Pour résumer ce qui a été dit concernant la construction des  $q$ -réels : si deux nombres rationnels sont proches l'un de l'autre (c'est-à-dire que la différence est proche de 0), alors leurs  $q$ -déformations sont proches l'une de l'autre (c'est-à-dire que les développements en série de Taylor coïncident jusqu'à un certain ordre). Par exemple, si l'on considère les rationnels  $\frac{12}{5} = 2.4$ ,  $\frac{241}{100} = 2.41$  et  $\frac{408}{169} \approx 2.41420$  leur  $q$ -déformations sont assez différentes en tant que fractions rationnelles mais leurs développements de Taylor coïncident jusqu'à l'ordre 7. On a

$$\begin{aligned} \left[ \frac{12}{5} \right]_q &= \frac{1 + 2q + 3q^2 + 3q^3 + 2q^4 + q^5}{1 + q + 2q^2 + q^3} \\ &= 1 + q + q^4 - 2q^6 + q^7 + 3q^8 - 3q^9 - 4q^{10} + 7q^{11} + 4q^{12} + \dots \\ \left[ \frac{241}{100} \right]_q &= \frac{1 + 4q + 10q^2 + 19q^3 + 29q^4 + 37q^5 + 40q^6 + 37q^7 + 29q^8 + 20q^9 + 10q^{10} + 4q^{11} + q^{12}}{q^{10} + 4q^9 + 8q^8 + 13q^7 + 17q^6 + 18q^5 + 16q^4 + 12q^3 + 7q^2 + 3q + 1} \\ &= 1 + q + q^4 - 2q^6 + q^7 + 3q^8 - 2q^9 - 7q^{10} + 9q^{11} + 7q^{12} - 17q^{13} + \dots \\ \left[ \frac{408}{169} \right]_q &= \frac{1 + 4q + 12q^2 + 25q^3 + 41q^4 + 56q^5 + 65q^6 + 65q^7 + 56q^8 + 41q^9 + 25q^{10} + 12q^{11} + 4q^{12} + q^{13}}{1 + 3q + 9q^2 + 16q^3 + 24q^4 + 29q^5 + 29q^6 + 24q^7 + 16q^8 + 9q^9 + 4q^{10} + q^{11}} \\ &= 1 + q + q^4 - 2q^6 + q^7 + 4q^8 - 5q^9 - 7q^{10} + 18q^{11} + 7q^{12} - 55q^{13} + 18q^{14} + 146q^{15} - 156q^{16} \dots \end{aligned}$$

Ces valeurs sont proches de  $1 + \sqrt{2} \approx 2,41421$ . Il se trouve que  $[1 + \sqrt{2}]_q$  peut être calculé explicitement (voir Section ) et on obtient

$$\begin{aligned} [1 + \sqrt{2}]_q &= \frac{q^3 + 2q - 1 + \sqrt{q^6 + 4q^4 - 2q^3 + 4q^2 + 1}}{2q} \\ &= 1 + q + q^4 - 2q^6 + q^7 + 4q^8 - 5q^9 - 7q^{10} + 18q^{11} + 7q^{12} - 55q^{13} + 18q^{14} + 146q^{15} - 156q^{16} \dots \end{aligned}$$

qui coïncident jusqu'à l'ordre 15 avec  $\left[ \frac{408}{169} \right]_q$ .

En pratique, la construction des nombres réels  $q$ -déformés peut se faire en utilisant des fractions continues (infinies). Soit  $x \geq 1$  un nombre réel, et  $x = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ , où  $a_i$  sont des entiers positifs, son développement en fraction continue. La suite de nombres rationnels

$$x_n := [a_1, \dots, a_n]$$

se rapproche de  $x$ ; c'est ce qu'on appelle la suite des convergents. Dans ce cas, le phénomène de stabilisation du Théorème peut être contrôlé avec une plus grande exactitude.

**Proposition 4.1.4** ([44]). Soit  $x \geq 1$  un nombre réel irrationnel. Les développements de Taylor en  $q = 0$  de deux convergents consécutifs  $q$ -déformés de la fraction continue de  $x$ , à savoir de  $x_{n-1} = [a_1, \dots, a_{n-1}]$  et  $x_n = [a_1, \dots, a_n]$ , ont les premiers  $a_1 + \dots + a_n - 1$  termes identiques, les coefficients de  $q^{a_1 + \dots + a_n - 1}$  différent de 1.

Le preuve de cette proposition se trouve dans [44] §3.2.

**Remarque 4.1.5.** Notons que le terme constant dans les séries entières  $[x]_q$ , pour  $x > 1$ , vaut toujours 1. Ce qui rend les séries inversibles.

### 4.1.2 Séries de Laurent

À ce stade, nous savons que la  $q$ -déformation définie jusqu'à présent transforme les entiers en polynômes, les rationnels en fractions rationnelles et les nombres réels (supérieurs à 1) en séries entières, dans chaque cas avec des coefficients entiers. Nous résumons la situation ainsi :

$$[\cdot]_q : \begin{cases} \mathbb{Z}_{\geq 0} & \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}[q] = \{a_0 + a_1q + \dots + a_nq^n ; a_0, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}\}, \\ \mathbb{Q}_{\geq 0} & \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}(q) = \left\{ \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} ; \mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q] \right\}, \\ \mathbb{R}_{\geq 1} & \longrightarrow \mathbb{Z}[[q]] = \left\{ \sum_{k \geq 0} \alpha_k q^k ; \alpha_k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{cases}$$

Dans [44], le théorème de stabilisation des séries a été établi dans le cas des irrationnels  $x > 1$ . Dans la Définition la suite des rationnels  $(x_n)_{n \geq 1}$  convergeant vers  $x$  est implicitement supposée ne contenir que des termes  $x_n \geq 1$  (permettant ainsi d'obtenir que des séries entières de la forme (4.1)). Nous allons expliquer dans la suite que le phénomène de stabilisation est valable pour tout irrationnel  $x \in \mathbb{R}$ . La différence résidera dans le fait que les séries obtenues dans le cas  $x > 1$  sont des séries entières à coefficients entiers avec des puissances de  $q$  positives, tandis que dans le cas où  $x < 1$ , les séries obtenues sont des séries à coefficients entiers avec des puissances de  $q$  qui peuvent être négatives ou positives.

Plus précisément, nous décrivons cette quantification par :

$$[\cdot]_q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}[[q]][q^{-1}] = \left\{ \sum_{k=N}^{+\infty} \alpha_k q^k ; N \in \mathbb{Z}, \alpha_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nous appelons séries de Laurent les éléments de l'anneau  $\mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$ . Nous allons faire quelques rappels sur cet anneau, notamment introduire sa topologie qui nous permettra de parler de convergence des suites (au sens usuel du terme) au lieu de stabilisation. Il s'agit de notions classiques pour lesquelles nous renvoyons par exemple à [6] pour une exposition plus complète.

Pour toute série  $f = \sum_{k=N}^{+\infty} \alpha_k q^k$  de  $\mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$ , on définit sa *valuation* par

$$val(f) = \inf \{ k \in \mathbb{Z} : \alpha_k \neq 0 \}.$$

si  $f \neq 0$  et on pose  $val(0) = +\infty$ .

On dit que la série  $f \neq 0$  est *unitaire* si  $\alpha_{val(f)} = \pm 1$ .

Les séries unitaires sont exactement les éléments inversibles de l'anneau  $\mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$ .

**Proposition 4.1.6** ([6]). *L'application suivante est une distance sur  $\mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$ .*

$$\begin{aligned} d : \mathbb{Z}[[q]][q^{-1}] \times \mathbb{Z}[[q]][q^{-1}] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (f, g) &\longmapsto \frac{1}{2^{\text{val}(f-g)}} \end{aligned}$$

Désormais, dire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$  avec  $f, f_n \in \mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$ , signifie que

$$d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Autrement dit, il existe une suite d'entiers  $N_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et une suite  $g_n \in \mathbb{Z}[[q]]$  telles que

$$f = f_n + q^{N_n} g_n.$$

Par la suite, on définit la notation  $O(q^{N_n})$  pour désigner une série de Laurent ayant une valuation au moins  $N_n$ .

Nous introduisons la proposition suivante afin de vérifier que ces passages à la limite dans  $\mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$  se comportent bien avec les opérations algébriques.

**Proposition 4.1.7.** *Soient  $f_n, g_n \in \mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = g$  avec  $f, g \in \mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$ , alors :*

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n + g_n = f + g$ ,
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n g_n = fg$ ,
3. si  $f_n$  est inversible alors  $f$  aussi et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{f_n} = \frac{1}{f}$ .

*Démonstration.*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = g$  donc il existe deux suites d'entiers  $N_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $N'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  telles que  $f - f_n = O(q^{N_n})$  et  $g - g_n = O(q^{N'_n})$ .

$$1) d(f + g, f_n + g_n) = \frac{1}{2^{\text{val}(f - f_n + g - g_n)}} \leq \frac{1}{2^{\min(\text{val}(f - f_n), \text{val}(g - g_n))}} \leq \frac{1}{2^{\min(N_n, N'_n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$2) f_n g_n = fg - O(N'_n) f - O(N_n) g + O(N_n + N'_n) = fg + O(N''_n) \text{ où } N''_n = \min(N_n, N'_n, N_n + N'_n).$$

Comme  $N''_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  on obtient bien le résultat.

$$3) \frac{1}{f_n} = \frac{1}{f - O(N_n)} = \frac{1}{f(1 - O(N_n)f^{-1})} = \frac{1}{f} (1 + O(N_n - \text{val}(f))).$$

Comme  $N_n - \text{val}(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  on obtient bien le résultat. □

Enfinement, nous reformulons le Théorème dans le cas général.

**Proposition 4.1.8.** *Pour tout nombre irrationnel  $x \in \mathbb{R}$  et toute suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de nombres rationnels qui converge vers  $x$ , la suite de  $q$ -rationnels  $([x_n]_q)_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$ . De plus la série limite  $[x]_q := \lim_{n \rightarrow +\infty} [x_n]_q$  ne dépend que de  $x$ .*

*Démonstration.* Dans le cas où  $x \geq 1$ , il s'agit d'une reformulation du Théorème .

Considérons le cas où  $x < 1$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $x + N > 1$ . Soit  $(x_n)$  une suite de nombres rationnels convergeant vers  $x$ . Posons  $y_n = x_n + N$ , alors  $y_n$  converge vers  $y := x + N$ , et l'on peut supposer  $y_n > 1$ . Ainsi,  $[y_n]_q$  converge vers  $[y]_q \in \mathbb{Z}[[q]]$ . Comme

$$[y_n]_q = [x_n + N]_q = q^N [x_n]_q + [N]_q$$

d'après (), on en déduit que  $[x_n]_q = \frac{[y_n]_q - [N]_q}{q^N}$  converge vers  $\frac{[y]_q - [N]_q}{q^N}$  dans  $\mathbb{Z}[[q]][[q^{-1}]]$ .  $\square$

**Remarque 4.1.9.** Notons que les séries de Laurent pour les irrationnels  $x < 1$  obtenues par convergence coïncident avec les séries définies par translation dans [44]. En effet, en reprenant les notations de la preuve ci-dessus, dans [44] la série  $[x]_q$ , pour  $x < 1$ , est définie directement par la formule  $\frac{[x+N]_q - [N]_q}{q^N}$ .

**Proposition 4.1.10.** *Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  les séries de Laurent  $[x]_q$  sont unitaires, de plus la valuation de la série  $\nu = \text{val}([x]_q)$  est caractérisée par*

(i)  $\nu = 0$  si  $x \geq 1$ ,

(ii)  $\nu \leq x < \nu + 1$  si  $x < 0$ ,

(iii)  $\nu < \frac{1}{x} \leq \nu + 1$  si  $0 < x < 1$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $x_n$  une suite de nombres rationnels qui converge vers  $x$ .

• Si  $x \geq 1$ , alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $x_n \geq 1$ , ainsi d'après la Proposition , on a pour tout  $n \geq n_0$  :

$$[x_n]_q = \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} = \frac{1 + \sum_{k \geq 1} r_{n,k} q^k}{1 + \sum_{k \geq 1} s_{n,k} q^k} = 1 + \sum_{k \geq 1} \varkappa_{n,k} q^k.$$

Ainsi pour tout  $n \geq n_0$  les séries  $[x_n]_q$  sont unitaires et de valuation  $\nu = 0$ . À la limite  $[x]_q$  est unitaire et de valuation  $\nu = 0$ .

• Si  $x \leq 0$  alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $-N \leq x < -N + 1$ . Il existe un indice  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $-N \leq x_n < -N + 1$ . Ainsi d'après la Proposition , on a pour tout  $n \geq n_0$  :

$$[x_n]_q = -q^{-N} \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} = -q^{-N} \frac{1 + \sum_{k \geq 1} r_{n,k} q^k}{1 + \sum_{k \geq 1} s_{n,k} q^k} = -q^{-N} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \varkappa_{n,k} q^k \right).$$

Ainsi pour tout  $n \geq n_0$  les séries  $[x_n]_q$  sont unitaires et de valuation  $\nu = -N$ . À la limite  $[x]_q$  est unitaire et de valuation  $\nu = -N$ .

• Si  $0 < x < 1$ , il existe  $N \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$  tel que  $\frac{1}{1-N} \leq x < \frac{1}{-N}$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $\frac{1}{1-N} \leq x_n < \frac{1}{-N}$ . D'après la Proposition , pour tout  $n \geq n_0$  :

$$[x_n]_q = q^{-N} \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} = q^{-N} \frac{1 + \sum_{k \geq 1} r_{n,k} q^k}{1 + \sum_{k \geq 1} s_{n,k} q^k} = q^{-N} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \varkappa_{n,k} q^k \right).$$

Ainsi pour tout  $n \geq n_0$  les séries  $[x_n]_q$  sont unitaires et de valuation  $\nu = -N$ . À la limite  $[x]_q$  est unitaire et de valuation  $\nu = -N$ .  $\square$

## 4.2 Propriétés et exemples

Des questions naturelles se posent. Parmi elles, nous nous concentrons sur les suivantes :

(1) Comment se comportent les opérations algébriques sur les nombres réels sous des  $q$ -déformations ?

(2) Les  $q$ -déformations des nombres algébriques satisfont-elles des équations algébriques ?

Concernant la question (1), notre résultat principal est le Théorème , qui se trouve et sera démontré dans le §. Pour la question (2), notre résultat principal est la Proposition .

### 4.2.1 Fractions continues infinies

Il est bien connu que tout nombre irrationnel peut être écrit avec des développements de fractions continues infinies. Pour chaque nombre irrationnel  $x$  il existe une suite d'entiers  $(a_i)_{i \geq 1}$  avec  $a_i \geq 1$  pour tout  $i \geq 2$  telle que la suite de rationnels  $[a_1, \dots, a_n]$  converge vers  $x$ . On écrit

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

et on utilise la notation  $x = [a_1, a_2, a_3 \dots]_q$ . D'après le §, la suite de fractions rationnelles  $[a_1, \dots, a_{2m}]_q$  converge vers la série formelle  $[x]_q$ . On écrit

$$[a_1, a_2, a_3 \dots]_q = [a_1]_q + \frac{q^{a_1}}{[a_2]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_2}}{[a_3]_q + \frac{q^{a_3}}{[a_4]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_4}}{\ddots}}}} \quad (4.3)$$

et on utilise la notation  $[x]_q = [a_1, a_2, a_3 \dots]_q$ .

De même avec les fractions continues négatives, pour chaque nombre irrationnel  $x$  il existe une suite d'entiers  $(c_i)_{i \geq 1}$  avec  $c_i \geq 2$  pour tout  $i \geq 2$  telle que la suite de rationnels  $\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket$  converge vers  $x$ . On écrit

$$x = c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{c_3 - \frac{1}{\ddots}}}$$

et on utilise la notation  $x = \llbracket c_1, c_2, \dots \rrbracket$ .

D'après le §, la suite de fractions rationnelles  $\llbracket c_1, \dots, c_k \rrbracket_q$  converge vers la série formelle  $[x]_q$ . On écrit

$$[x]_q = [c_1]_q - \frac{q^{c_1-1}}{[c_2]_q - \frac{q^{c_2-1}}{[c_3]_q - \frac{q^{c_3-1}}{\ddots}}} \quad (4.4)$$

et on utilise aussi la notation  $[x]_q = \llbracket c_1, c_2, c_3 \dots \rrbracket_q$ .

**Remarque 4.2.1.** Nous allons vérifier que ces notations sont compatibles avec les opérations algébriques.

Regardons dans un premier temps le cas sans  $q$ -déformation.

**Lemme 4.2.2.** Pour tout  $m \geq 1$ , on a

$$\llbracket c_1, c_2, \dots \rrbracket = c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{c_m - \frac{1}{y}}}}$$

où  $y = \llbracket c_{m+1}, c_{m+2}, \dots \rrbracket$ .

*Démonstration.* Ceci est facilement obtenu en intervertissant la limite avec les opérations algébriques continues finies. Définissons  $y_n := \llbracket c_{m+1}, \dots, c_{m+n} \rrbracket$ . Par définition  $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$  et

$$\llbracket c_1, c_2, \dots \rrbracket = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{c_m - \frac{1}{y_n}}}} \stackrel{\text{(continuité)}}{=} c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{c_m - \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n}}}}$$

□

Passons maintenant à la notation  $q$ -déformée avec la proposition suivante qui permet de vérifier la bonne compatibilité avec les opérations algébriques. C'est la Proposition qui a pour conséquence immédiate les deux corollaires qui suivent.

**Corollaire 4.2.3.** Pour tout  $m \geq 1$ , on a

$$\llbracket c_1, c_2, \dots \rrbracket_q = [c_1]_q - \frac{q^{c_1-1}}{[c_2]_q - \frac{q^{c_2-1}}{\dots - \frac{q^{c_{m-1}-1}}{[c_m]_q - \frac{q^{c_m-1}}{Y}}}}$$

où  $Y = \llbracket c_{m+1}, c_{m+2}, \dots \rrbracket_q$ .

**Corollaire 4.2.4.** On a

$$\llbracket c_1 + 1, c_2, \dots \rrbracket_q = q \llbracket c_1, c_2, \dots \rrbracket_q + 1$$

Le théorème qui suit permet de déduire que l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sur la droite réelle commute avec les  $q$ -déformations.

**Théorème 4.2.5.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les  $q$ -déformations satisfont

$$[x + 1]_q = q[x]_q + 1, \tag{4.5}$$

$$\left[ -\frac{1}{x} \right]_q = -\frac{1}{q[x]_q}. \tag{4.6}$$

*Démonstration.* Pour tout  $x \in \mathbb{Q}$ , il s'agit des formules ( ) et ( ).

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , ces expressions s'obtiennent par passage à la limite dans ( ) et ( ) ce qui est permis compte-tenu de la Proposition .  $\square$

Les relations ( ) et ( ) correspondent aux actions de  $R_q$  et  $S_q$  par homographies, en version matricielle celles-ci s'expriment comme  $[Rx]_q = R_q[x]_q$  et  $[Sx]_q = S_q[x]_q$ . Avec la Proposition ceci implique le résultat suivant.

**Corollaire 4.2.6.** *Pour tout  $M \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $[Mx]_q = [M]_q[x]_q$*

#### 4.2.2 Calcul de $[e]_q$

Le développement continu en fraction de la constante d'Euler est donné par le célèbre modèle régulier suivant  $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots]$  (voir suite A003417 dans l'OEIS) . Pour calculer les 40 premiers termes de la série  $[e]_q$ , il faut prendre le 15ième convergent

$$e_{15} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10] = 517656/190435.$$

La série  $[e]_q$  commence de la façon suivante :

$$\begin{aligned} [e]_q = & 1 + q + q^3 - q^5 + 2q^6 - 3q^7 + 3q^8 - q^9 \\ & - 3q^{10} + 9q^{11} - 17q^{12} + 25q^{13} - 29q^{14} + 23q^{15} + 2q^{16} \\ & - 54q^{17} + 134q^{18} - 232q^{19} + 320q^{20} - 347q^{21} + 243q^{22} + 71q^{23} \\ & - 660q^{24} + 1531q^{25} - 2575q^{26} + 3504q^{27} - 3804q^{28} + 2747q^{29} + 488q^{30} \\ & - 6537q^{31} + 15395q^{32} - 25819q^{33} + 34716q^{34} - 36780q^{35} + 24771q^{36} + 9096q^{37} \\ & - 70197q^{38} + 156811q^{39} \dots \end{aligned}$$

On observe que les coefficients de  $q^{2+7k}$ , où  $k \geq 0$ , s'avèrent plus petits que ceux de leurs voisins. Les signes des coefficients obéissent également à un certain schéma de période 7 : en effet, le double plus, c'est-à-dire que les signes "+, +" apparaissent avec une période 7. La raison d'une telle périodicité de 7 n'est pas connue.

#### 4.2.3 Calcul de $[\pi]_q$

Le développement continu de la fraction de  $\pi$  (cf. suite A001203 dans l'OEIS) commence comme suit :  $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 84, \dots]$ . Les règles régissant cette suite sont inconnues.

Le 4ième convergent  $\pi_5 = [3, 7, 15, 1] = 355/113$  donne 24 premiers termes de  $[\pi]_q$ , et déjà le 5ième convergent  $\pi_5 = [3, 7, 15, 1, 292] = 103993/33102$  permet de calculer  $[\pi]_q$  jusqu'au degré 317. Les calculs ont été poussés jusqu'à  $[\pi_{38}]_q = 11895062545096656711950/3786316004878788190109$  qui se rapproche de  $\pi$  jusqu'à 43 chiffres, et cela donne les 603 premiers termes de la série  $[\pi]_q$ .

Les premiers 79 premiers termes de  $[\pi]_q$  sont :

$$\begin{aligned}
 [\pi]_q = & 1 + q + q^2 + q^{10} - q^{12} - q^{13} + q^{15} + q^{16} \\
 & -q^{20} - 2q^{21} - q^{22} + 2q^{23} + 4q^{24} + q^{25} \\
 & -4q^{27} - 4q^{28} - 2q^{29} + q^{30} + 5q^{31} + 8q^{32} + 3q^{33} \\
 & -3q^{34} - 10q^{35} - 12q^{36} - 5q^{37} + 8q^{38} + 19q^{39} + 20q^{40} + 2q^{41} \\
 & -18q^{42} - 32q^{43} - 25q^{44} + 31q^{46} + 51q^{47} + 45q^{48} \\
 & -7q^{49} - 65q^{50} - 94q^{51} - 57q^{52} + 35q^{53} + 122q^{54} + 140q^{55} + 72q^{56} \\
 & -76q^{57} - 209q^{58} - 234q^{59} - 90q^{60} + 171q^{61} + 383q^{62} + 363q^{63} + 76q^{64} \\
 & -364q^{65} - 650q^{66} - 545q^{67} - 6q^{68} + 702q^{69} + 1101q^{70} + 790q^{71} \\
 & -180q^{72} - 1329q^{73} - 1824q^{74} - 1113q^{75} + 642q^{76} + 2454q^{77} + 2982q^{78} + 1415q^{79} \dots
 \end{aligned}$$

Les coefficients de cette série croissent très lentement contrairement aux autres exemples que nous avons considérés jusqu'à présent. Le rapport asymptotique de deux coefficients consécutifs semble être proche de 1, cela impliquerait que le rayon de convergence de la série est égal à 1. Une observation curieuse est que, pour des raisons inconnues, le coefficient de  $q^{45}$  disparaît. Ont également été observé l'oscillation de la suite de coefficients, et la propriété d'unimodalité de chaque (courte) sous-suite de coefficients de signe constant. Aucun modèle ni aucune conjecture pour déterminer une équation fonctionnelle pour cette série n'a pu être établi.

### 4.3 Étude des nombres irrationnels quadratiques

Un nombre irrationnel quadratique réel est un nombre réel  $x$  de la forme  $x = \frac{r \pm \sqrt{p}}{s}$ , avec  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $s, p \in \mathbb{Z}_{>0}$  et  $p$  n'est pas un carré dans  $\mathbb{Z}_{>0}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $x$  est un nombre irrationnel quadratique réel ;
- (b)  $x$  est une solution d'une équation  $aX^2 + bX + c = 0$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  et  $b^2 - 4ac > 0$  n'étant pas un carré ;
- (c) Il existe  $M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ , avec  $\text{Tr } M > 2$ , tel que  $M \cdot x = x$  ;
- (d) Le développement de  $x$  en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang [Théorème de Lagrange].

Ces assertions sont des résultats classiques et bien connus sur les nombres irrationnels quadratiques. L'objectif de cette section est de démontrer une  $q$ -version de ces assertions. Les résultats énoncés dans cette partie proviennent de notre article [38].

**Théorème 4.3.1.** Soit  $x = \frac{b \pm \sqrt{p}}{s}$  un irrationnel quadratique. Sa  $q$ -déformation  $[x]_q$  satisfait ce qui suit :

- (i)  $[x]_q = \frac{\mathcal{R} \pm \sqrt{\mathcal{P}}}{\mathcal{S}}$ , avec  $\mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{S} \in \mathbb{Z}[q]$ , et  $\mathcal{P}$  palindrome ;

(ii)  $[x]_q$  est solution de l'équation  $AX^2 + BX + C = 0$ , avec  $A, B, C \in \mathbb{Z}[q]$ ;

(iii) Il existe une matrice  $M_q \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}])$  telle que  $M_q \cdot [x]_q = [x]_q$ ;

(iv) Le développement de  $[x]_q$  en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.

En démontrant ce théorème, nous disons que les  $q$ -déformations qui ont été introduites se comportent bien avec la caractérisation des irrationnels quadratiques.

### 4.3.1 Preuve du théorème

Le point (iii) du Théorème se déduit du Corollaire et cela implique immédiatement le point (i) (sauf pour la propriété de palindromicité de  $\mathcal{P}$  qui sera établie dans §) et le point (ii). Le point (iv) est une tautologie issue de § et du théorème de Lagrange (propriété (d) au début de la section).

### 4.3.2 Expressions explicites

Comme rappelé au premier paragraphe,  $x$  est un nombre irrationnel quadratique si et seulement si son développement en fraction continue devient périodique, c'est-à-dire si et seulement s'il existe des entiers  $(b_1, \dots, b_l)$ , avec  $b_i \geq 2$  pour  $i \geq 2$ , et des entiers  $(c_1, \dots, c_k) \neq (2, \dots, 2)$ , avec  $c_i \geq 2$  pour tout  $i$ , tel que

$$x = \llbracket b_1, \dots, b_l, \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$$

On écrit  $x = \llbracket b_1, \dots, b_l, \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$ . Quand  $x = \llbracket \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$  on dit que  $x$  a un développement purement périodique.

**Lemme 4.3.2.** Si  $x = \llbracket \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$  alors  $[x]_q$  est un point fixe de la matrice  $M_q(c_1, \dots, c_k)$ .

*Démonstration.* C'est un résultat classique que si  $x = \llbracket \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$  alors  $x$  est un point fixe de la matrice  $M(c_1, \dots, c_k)$ . En appliquant la proposition, on obtient le  $q$ -analogue de ce résultat.  $\square$

**Proposition 4.3.3.** Si  $x$  est un point fixe de la matrice  $M(c_1, \dots, c_k)$  alors sa  $q$ -déformation  $[x]_q$  satisfait l'équation

$$AX^2 - BX + C = 0,$$

où  $A, B$  et  $C$  sont des polynômes dans  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  donnés par les  $q$ -continuants  $E_k$  défini dans §

$$\begin{aligned} A &= E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q \\ B &= E_k(c_1, \dots, c_k)_q + q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q \\ C &= q^{c_k-1} E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q \end{aligned}$$

*Démonstration.* En exprimant que  $[x]_q$  est un point fixe de  $M_q(c_1, \dots, c_k)$  et en utilisant l'expression de la Proposition on obtient

$$[x]_q = \frac{[x]_q E_k(c_1, c_2, \dots, c_k)_q - q^{c_k-1} E_{k-1}(c_1, c_2, \dots, c_{k-1})_q}{[x]_q E_{k-1}(c_2, c_3, \dots, c_k)_q - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, c_3, \dots, c_{k-1})_q},$$

ce qui conduit au résultat.  $\square$

**Proposition 4.3.4.** *Si  $x$  est un point fixe de la matrice  $M(c_1, \dots, c_k)$ , alors sa  $q$ -déformation  $[x]_q$  a la forme suivante*

$$[x]_q = \frac{\mathcal{R} \pm \sqrt{\mathcal{P}}}{\mathcal{S}},$$

où  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont des polynômes dans  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  donnés par les  $q$ -continuants

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (\operatorname{Tr} M_q(c_1, \dots, c_k))^2 - 4q^{\sum_{i=1}^k (c_i-1)} \\ \mathcal{R} &= E_k(c_1, \dots, c_k)_q + q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q \\ \mathcal{S} &= 2E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q \end{aligned}$$

*Démonstration.* Les expressions sont obtenues en résolvant l'équation de la Proposition. Pour  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$ , les expressions suivent immédiatement. Pour  $\mathcal{P}$  on obtiendrait l'expression suivante

$$\mathcal{P} = \left( E_k(c_1, \dots, c_k)_q + q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q \right)^2 - 4 E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q q^{c_k-1} E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q.$$

L'expression de  $\mathcal{P}$  peut être simplifiée en  $(\operatorname{Tr} M_q(c_1, \dots, c_k))^2 - 4q^{\sum_{i=1}^k (c_i-1)}$ . En effet, d'après la Proposition on voit

$$\operatorname{Tr} M_q(c_1, \dots, c_k) = E_k(c_1, \dots, c_k)_q - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q$$

et alors on utilise la relation suivante sur les  $q$ -continuants

$$E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q \cdot q^{c_k-1} E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q - E_k(c_1, \dots, c_k)_q \cdot q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q = q^{\sum_{i=1}^k (c_i-1)}.$$

qui est donnée par l'identité de Desnanot-Jacobi appliquée à (3.18).  $\square$

**Remarque 4.3.5.** Ces polynômes  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  seront très utilisés par la suite. Notamment dans §, § et §. Pour cela, on introduit la notation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &:= \mathcal{P}(c_1, \dots, c_k) = (\operatorname{Tr} M_q(c_1, \dots, c_k))^2 - 4q^{\sum_{i=1}^k (c_i-1)} \\ &= \left( E_k(c_1, \dots, c_k)_q + q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q \right)^2 - 4 E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q q^{c_k-1} E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q \end{aligned}$$

Lorsque les périodes dans les développements en fractions continues sont courtes, il peut être plus rapide et naturel d'utiliser l'expression en fraction continue infinie pour calculer les  $q$ -déformations des irrationnels quadratiques plutôt que les matrices (voir les exemples plus loin (4.16) et (4.25) et §).

Dans [44], les expressions explicites des premières racines carrées avaient été calculées avec les développements en fractions continues. Nous retrouvons exactement ces expressions en utilisant les formules obtenues à la Proposition.

**Exemple 4.3.6.** ([44]) Les séries  $[\sqrt{2}]_q$ ,  $[\sqrt{3}]_q$ ,  $[\sqrt{5}]_q$  et  $[\sqrt{7}]_q$  satisfont les équations fonctionnelles suivantes :

$$q^2 [\sqrt{2}]_q^2 - (q^3 - 1) [\sqrt{2}]_q = q^2 + 1, \quad (4.7)$$

$$q^2 [\sqrt{3}]_q^2 - (q^3 + q^2 - q - 1) [\sqrt{3}]_q = q^2 + q + 1, \quad (4.8)$$

$$q^3 [\sqrt{5}]_q^2 - (q^5 + q^3 - q^2 - 1) [\sqrt{5}]_q = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1, \quad (4.9)$$

$$q^3 [\sqrt{7}]_q^2 - (q^5 + q^4 - q - 1) [\sqrt{7}]_q = q^4 + 2q^3 + q^2 + 2q + 1. \quad (4.10)$$

On obtient les expressions suivantes pour les racines carrées quantifiées.

$$\begin{aligned} [\sqrt{2}]_q &= \frac{q^3 - 1 + \sqrt{q^6 + 4q^4 - 2q^3 + 4q^2 + 1}}{2q^2}, \\ [\sqrt{3}]_q &= \frac{q^3 + q^2 - q - 1 + \sqrt{q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 3q^2 + 2q + 1}}{2q^2}, \\ [\sqrt{5}]_q &= \frac{q^5 + q^3 - q^2 - 1 + \sqrt{q^{10} + 2q^8 + 2q^7 + 5q^6 + 5q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 1}}{2q^3}, \\ [\sqrt{7}]_q &= \frac{q^5 + q^4 - q - 1 + \sqrt{q^{10} + 2q^9 + q^8 + 4q^7 + 6q^6 + 6q^4 + 4q^3 + q^2 + 2q + 1}}{2q^3}. \end{aligned}$$

Donnons quelques détails pour le cas  $\sqrt{2}$ . Il est facile d'obtenir que  $\sqrt{2}$  est point fixe de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Or  $A = -M(2, 2, 3, 1, 1)$  et nous pouvons  $q$ -déformer la matrice

$$-M_q(2, 2, 3, 1, 1) = - \begin{pmatrix} q^2(1+q+q^2) & (1+q^2)(1+q) \\ q^2(1+q) & (1+q+q^2) \end{pmatrix} \text{ dont } [\sqrt{2}]_q \text{ est point fixe.}$$

Nous calculons ainsi grâce aux entrées de cette matrice :

$$\mathcal{A} = E_4(2, 3, 3, 1)_q = q^2(1+q);$$

$$\mathcal{B} = E_5(2, 2, 3, 1, 1)_q + q^0 E_3(2, 3, 1)_q = (1+q)(1-q^3);$$

$$\mathcal{C} = q^0 E_4(2, 2, 3, 1)_q = -(1+q)(1+q^2).$$

de la Proposition et après simplification par  $(q+1)$  on retrouve l'équation fonctionnelle ci-dessus pour  $[\sqrt{2}]_q$ . Finalement en utilisant la Proposition on retrouve l'expression de  $[\sqrt{2}]_q$  donnée ci-dessus.

### 4.3.3 Palindromicité de $\mathcal{P}$ (fin de la preuve du Théorème)

Soit  $x$  un irrationnel quadratique. Il existe une matrice  $M \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  telle que  $M \cdot x = x$ . On peut écrire  $M = M(c_1, \dots, c_k)$  avec  $c_1, \dots, c_k$  des entiers positifs. On obtient  $[x]_q$  comme point fixe de  $M_q(c_1, \dots, c_k)$ . Puisque les coefficients  $c_i$  sont positifs, les entrées de  $M_q(c_1, \dots, c_k)$  sont des polynômes en  $q$  et par la Proposition on obtient  $[x]_q = \frac{\mathcal{R} \pm \sqrt{\mathcal{P}}}{\mathcal{S}}$ , avec

$$\mathcal{P} = (\text{Tr } M_q(c_1, \dots, c_k))^2 - 4q^{\sum_{i=1}^k (c_i - 1)}. \quad (4.11)$$

On sait par le Lemme que le polynôme  $\text{Tr } M_q(c_1, \dots, c_k)$  est un palindrome. De plus son degré est le même que  $\deg E_k(c_1, \dots, c_k)_q = \sum_{i=1}^k (c_i - 1)$ . Par conséquent,  $(\text{Tr } M_q(c_1, \dots, c_k))^2$  est un polynôme palindrome de degré pair avec un coefficient médian attaché à  $q^{\sum_{i=1}^k (c_i - 1)}$ . Ainsi  $\mathcal{P}$  est toujours un palindrome.

### 4.3.4 Exemple du nombre d'or

Considérons le développement en fraction continue infinie du nombre d'or :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, 1, \dots].$$

Nous pouvons également travailler avec le développement en fraction continue négative infinie, mais pour rendre les calculs plus commodes, il est préférable de considérer :

$$\varphi + 1 = \llbracket 3, 3, 3, 3, \dots \rrbracket.$$

D'après (4.3), la  $q$ -déformation de  $\varphi$  est donnée par la fraction continue infinie

$$[\varphi]_q = 1 + \frac{q}{1 + \frac{q^{-1}}{1 + \frac{q}{1 + \frac{q^{-1}}{\ddots}}}} \quad (4.12)$$

Ou bien d'après (4.4), la  $q$ -déformation de  $\varphi + 1$  est donnée par la fraction continue infinie

$$[\varphi + 1]_q = 1 + q + q^2 - \frac{q^2}{1 + q + q^2 - \frac{q^2}{1 + q + q^2 - \frac{q^2}{1 + q + q^2 - \frac{q^2}{\ddots}}}} \quad (4.13)$$

Ainsi, d'après le Corollaire , les relations (4.12) et (4.13) peuvent se réécrire

$$[\varphi]_q = 1 + \frac{q}{1 + \frac{q^{-1}}{[\varphi]_q}} \quad (4.14)$$

et

$$[\varphi + 1]_q = 1 + q + q^2 - \frac{q^2}{[\varphi + 1]_q} \quad (4.15)$$

Ces deux relations montrent que la série  $[\varphi]_q$  satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$q [\varphi]_q^2 - (q^2 + q - 1) [\varphi]_q - 1 = 0. \quad (4.16)$$

C'est immédiat pour l'expression (4.14). Pour (4.15) il suffit d'utiliser la relation () du Théorème afin de retrouver la même équation fonctionnelle.

Dans un second temps, en résolvant (4.16), on obtient que

$$[\varphi]_q = \frac{q^2 + q - 1 + \sqrt{q^4 + 2q^3 - q^2 + 2q + 1}}{2q}. \quad (4.17)$$

Évidemment, en  $q = 1$  on retrouve le nombre d'or  $\varphi$ .

Nous obtenons ainsi la série correspondant au développement de Taylor en  $q = 0$  de  $[\varphi]_q$  qui commence ainsi :

$$[\varphi]_q = 1 + q^2 - q^3 + 2q^4 - 4q^5 + 8q^6 - 17q^7 + 37q^8 - 82q^9 + 185q^{10} - 423q^{11} + 978q^{12} - 2283q^{13} + 5373q^{14} - 12735q^{15} + 30372q^{16} - 72832q^{17} + 175502q^{18} - 424748q^{19} + 1032004q^{20} \dots$$

**Remarque 4.3.7.** Les coefficients de cette série sont (au signe près) les nombres de Catalans généralisés, voir A004148 de [31].

**Remarque 4.3.8.** Nous avons explicité des formules dans la Proposition et la Proposition, qui sont des éléments théoriques. Cependant en pratique, sur des petits exemples comme celui du nombre d'or, ou plus généralement sur des exemples qui possèdent un développement en fraction continue infinie d'une courte période, on utilise les formules permettant de  $q$ -déformer les fractions continues infinies (4.3) et (4.4), puis on résout l'équation fonctionnelle obtenue correspondante comme nous venons de le faire dans cette partie.

## 4.4 Étude des rayons de convergence des $q$ -réels

Il y a un célèbre résultat dû à [30], qui affirme que le nombre d'or  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est (de même que tout nombre qui lui est équivalent), l'irrationnel qui s'approche le plus mal par des fractions. Plus précisément, pour tout nombre réel  $x \in \mathbb{R}$  on peut définir comme mesure de l'irrationalité la constante de Markov  $\mu(x)$ , qui est le minimum des  $c$ , pour lesquels l'inégalité  $|x - \frac{p}{q}| < \frac{c}{q^2}$  possède une infinité de solutions entières  $p, q$ . Le théorème des nombres irrationnels d'Hurwitz énonce que pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\mu(x) \leq \mu(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

avec égalité uniquement pour les  $x$  étant  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -équivalent au nombre d'or.

Dans cette section nous étudions un possible  $q$ -analogue de ce résultat général.

Nous étudions ici les propriétés analytiques des  $q$ -réels. En considérant le paramètre de déformation  $q$  comme une *variable complexe*,  $q \in \mathbb{C}$ , nous étudions le rayon de convergence,  $R(x)$ , des séries (4.2).

En particulier, nous allons montrer dans le § que le rayon de convergence correspondant au nombre d'or vaut

$$R_\star := R(\varphi) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.381966\dots$$

Nous avons la conjecture suivante, qui peut être considérée comme un analogue possible de l'affirmation de Hurwitz.

**Conjecture 4.4.1** ([40]). *Pour tout réel  $x > 0$  le rayon de convergence  $R(x)$  des séries  $[x]_q$  satisfait l'inégalité  $R(x) \geq R_\star$  et l'égalité est vérifiée uniquement pour les  $x$  qui sont  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -équivalents à  $\varphi$ .*

La Conjecture a été vérifiée par de nombreux calculs informatiques. Dans [40], nous obtenons les résultats généraux suivants en vue de la démonstration de la conjecture.

**Théorème 4.4.2** ([40]). *Pour tout nombre rationnel  $x > 0$  le rayon de convergence  $R(x)$  de la série  $[x]_q$  a la borne inférieure suivante*

$$R(x) > 3 - 2\sqrt{2} = 0.171572\dots$$

**Théorème 4.4.3** ([40]). *Si tous les coefficients  $c_i$  du développement en fraction continue négative d'un nombre rationnel  $x = \llbracket c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \rrbracket$  sont supérieurs ou égaux à 4, alors le rayon de convergence de  $[x]_q$  est supérieur ou égal à  $R_\star$ .*

Les deux théorèmes ci-dessus ont été exposés dans nos travaux ([40]), et ci-dessous allons apporter deux nouveaux théorèmes qui élargissent ces résultats aux nombres irrationnels quadratiques, dont les preuves se trouvent aux § et §.

**Théorème 4.4.4.** Si  $x > 0$  est un nombre irrationnel quadratique de la forme  $x = \llbracket b_1, \dots, b_l, \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$ , alors  $R(x) \geq R_2$ .

**Théorème 4.4.5.** Si  $x > 0$  est un nombre irrationnel quadratique de la forme  $x = \llbracket b_1, \dots, b_l, \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$  avec  $c_i \geq 4$ , alors  $R(x) \geq R_*$ .

Notre principal outil analytique est le théorème de Rouché (voir [13, 63]), que nous rappelons ci-dessous.

**Théorème 4.4.6 (Rouché).** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de variable complexe  $q$ , holomorphes à l'intérieur d'un disque  $D$  et continues sur le bord  $\partial D$ . Supposons que  $|f(q)| > |g(q)|$  sur  $\partial D$ , alors  $f$  et  $f + g$  ont le même nombre de zéros à l'intérieur de  $D$ .

Notons que dans le cas rationnel, le rayon de convergence de la série de Taylor correspond au rayon du disque maximal autour de 0 qui ne contient pas de zéros du polynôme  $\mathcal{S}(q)$ , le dénominateur de (4.1.1). Nous renvoyons également au travail de [59], où notre technique a été utilisée pour prouver la conjecture pour un ensemble très particulier de nombres (appelés nombres métalliques).

La Conjecture , le Théorème et le Théorème donnent une restriction pour la série (4.2), qui correspond à un  $q$ -réel.

Notons que l'inverse  $\rho = R^{-1}$  du rayon de convergence de la série entière (4.2) peut être donnée par la formule standard (voir par exemple [13])  $\rho(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} |\varkappa_n|^{\frac{1}{n}}$  et décrit donc la croissance des coefficients  $\varkappa_n$ . La conjecture peut être reformulée sous la forme, plus proche de Hurwitz, comme l'inégalité

$$\rho(x) \leq \rho(\varphi) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \varphi^2$$

pour tout nombre réel  $x$ , et signifie donc que  $[\varphi]_q$  a la croissance la plus rapide des coefficients parmi tous les  $q$ -réels. Autrement dit, la série  $[x]_q$  converge toujours "mieux" que  $[\varphi]_q$ , lorsque  $x$  n'est pas équivalent à  $\varphi$ . Dans le cas particulier où  $x = \frac{r}{s}$  est un rationnel, la conjecture signifie que le polynôme  $\mathcal{S}(q)$  dans (4.1.1) ne possède pas de racine  $q$  avec  $|q| < R_*$ .

Dans la section , nous considérons l'exemple important du nombre d'or  $q$ -déformé. Son approximation par les quotients des nombres de Fibonacci consécutifs conduit à d'intéressants "polynômes de Fibonacci". Nous prouvons que les racines de ces polynômes appartiennent à l'anneau  $R_0 < |q| < R_0^{-1}$ , où  $R_0 = 0.35320\dots$  est la racine réelle de l'équation cubique

$$R^3 + 2R^2 + 2R - 1 = 0.$$

On obtient ainsi une estimation plus faible  $R(x) > R_0$  pour le rayon de convergence des  $q$ -convergentes correspondants.

Dans la section , on considère la  $q$ -version du nombre d'argent  $[\sqrt{2}]_q$  et les "polynômes de Pell" correspondant. Nous prouvons que les racines de ces polynômes appartiennent à l'anneau  $R_1 < |q| < R_1^{-1}$  où  $R_1 = 0.43542\dots$  est la plus petite racine positive de l'équation

$$R^4 - 2R^3 - 2R + 1 = 0.$$

Nous commençons par donner dans la section suivante, des propositions (dont les conséquences immédiates sont les théorèmes et ) en lien avec les racines des continuants. Les preuves de ces propositions impliqueront immédiatement les deux théorèmes.

#### 4.4.1 Racines des continuants

Nous rappelons brièvement que la  $q$ -déformation d'un nombre rationnel peut s'exprimer en termes de continuants d'Euler :

$$\frac{\mathcal{R}(q)}{\mathcal{S}(q)} = \left[ \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right]_q = \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)_q}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q} \quad (4.18)$$

Ainsi, pour prouver les théorèmes et , il suffit d'étudier les racines du polynôme  $\mathcal{S}(q)$  au dénominateur de (4.18), autrement dit, d'étudier les racines des continuants  $E_k(c_1, \dots, c_k)_q$ .

Le Théorème est une conséquence immédiate de la proposition suivante, dont la preuve est donnée au §.

**Proposition 4.4.7.** *Pour tout  $k \geq 0$  et pour tout  $c_1, \dots, c_k$  avec  $c_i \geq 2$ , le polynôme  $E_k(c_1, \dots, c_k)_q$  n'a pas de racine dans le disque  $D_{R_2}$ . Avec  $R_2 = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$*

Le Théorème est une conséquence immédiate de la proposition suivante, dont la preuve est donnée au §.

**Proposition 4.4.8.** *Pour tout  $k \geq 0$  et pour tout  $c_1, \dots, c_k$  avec  $c_i \geq 4$ , le polynôme  $E_k(c_1, \dots, c_k)_q$  n'a pas de racine dans le disque  $D_{R_*}$ .*

Enfin, en se restreignant au cas  $k = 2$ , nous pouvons affiner le résultat de la Proposition , ce qui nous conduit au résultat suivant.

**Proposition 4.4.9.** *Pour tout  $a, b \geq 2$ , le polynôme  $E_2(a, b)_q$  n'a pas de racine dans le disque  $D_{R_*}$ .*

Cette dernière proposition nous sera particulièrement utile dans le §.

Pour démontrer cette proposition (ainsi que les deux autres au dessus), nous aurons besoin du lemme fondamental suivant pour effectuer nos inégalités.

**Lemme 4.4.10.** *Pour tout entier positif  $n$ , on a*

$$\left| [n]_q \right| \geq \frac{1 - R^n}{1 + R}, \quad (4.19)$$

sur un cercle  $C_R = \{q \in \mathbb{C} : |q| = R\}$  de rayon  $R$  quelconque.

*Démonstration.* En effet, le module du polynôme  $[c]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}$  restreinte à  $C_R$  est de la forme

$$\left| [n]_q \right|_{C_R}^2 = \frac{(1 - R^n e^{in\theta})(1 - R^n e^{-in\theta})}{(1 - R e^{i\theta})(1 - R e^{-i\theta})} = \frac{1 - 2R^n \cos(2n\theta) + R^{2n}}{1 - 2R \cos(\theta) + R^2},$$

où  $\theta$  est le paramètre standard sur le cercle. On observe que le numérateur de cette fraction est supérieur au numérateur au carré de la partie droite de (4.19), alors que le dénominateur est plus petit.  $\square$

Démontrons maintenant la Proposition .

*Démonstration.* Ce résultat a déjà été énoncé pour tout  $a, b \geq 4$  (Théorème et est prouvé dans §).

Nous allons donc étudier les "petits cas" manquants à l'aide de résolutions numériques directes :

- $E_2(2, 2) = 1 + q + q^2$  dont la valeur absolue minimale de ses racines est 1.
- $E_2(2, 3) = 1 + q + 2q^2 + q^3$  dont la valeur absolue minimale de ses racines est environ 0.754877.
- $E_2(2, 4) = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4$  dont la valeur absolue minimale de ses racines est environ 0.762031.
- $E_2(3, 2) = 1 + 2q + q^2 + q^3$  dont la valeur absolue minimale de ses racines est environ 0.569840.
- $E_2(3, 3) = 1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + q^4$  dont la valeur absolue minimale de ses racines est 1.
- Montrons par récurrence que pour tout  $a \geq 4$ ,  $E_2(2, a) = 1 + q + 2q^2 + \dots + 2q^{a-1} + q^a =: P_a(q)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ .

- Initialisation : Les cas  $E(2, 2)$ ,  $E(2, 3)$  et  $E(2, 4)$  ont été étudiés ci-dessus.

- Hérité : Supposons que pour un entier  $a$  fixé supérieur ou égal à 4,  $P_a(q)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ .

On a :

$$P_{a+1}(q) = P_a(q) + q^a + q^{a+1}$$

Montrons maintenant que  $|P_a(q)| > |q^a + q^{a+1}|$ .

Pour les inégalités ci-dessous, on prend  $q \in C_{R_\star}$  et on note  $R = R_\star$  :

$$\begin{aligned} |P_a(q)| &= |[a+1]_q + q^2[a-2]_q| \stackrel{(4.19)}{\geq} \frac{1-R^{a-1}}{1-R} - R^2 \frac{1-R^{a-2}}{1-R} \\ &\geq \frac{1-R^5}{1-R} - \frac{R^2}{1-R} \approx 0,48165544 \end{aligned}$$

et

$$|q^a + q^{a+1}| \leq R^4 + R^5 \approx 0.029416$$

D'après le théorème de Rouché,  $P_{a+1}(q)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ . La récurrence est donc prouvée.

- Montrons que pour tout  $a \geq 4$ ,  $E_2(3, a)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ .

$E_2(3, a) = E_2(2, a) + q + q^3 + \dots + q^{a+1}$ , on sait d'après la récurrence ci-dessus que  $E_2(2, a)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$  pour tout  $a \geq 4$ . Montrons alors que  $|E_2(2, a)| > |q + q^3 + \dots + q^{a+1}|$ .

Pour les inégalités ci-dessous, on prend  $q \in C_{R_\star}$  et on note  $R = R_\star$  :

$$|q + q^3 + \dots + q^{a+1}| \leq R + R^3 \frac{1-R^{a-1}}{1-R} \leq R + \frac{R^3}{1-R} \approx 0,47213595$$

et

$$|E_2(2, a)| \geq 0,48165544$$

D'après le théorème de Rouché,  $E_2(3, a)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$  pour tout  $a \geq 4$

- On montre avec les mêmes méthodes, le résultats pour les cas  $E_2(a, 2)$  et  $E_2(a, 3)$  avec  $a \geq 4$ .

Tous les cas énoncés ci-dessus prouvent la proposition dans son entièreté.

□

#### 4.4.2 Preuve de la Proposition

Nous prouvons ici que pour tout  $k \geq 0$  les continuants  $E_k(c_1, \dots, c_k)_q$  n'ont pas de racines à l'intérieur de  $D_{R_2}$ .

Nous allons procéder par récurrence sur  $k$ .

- Initialisation : Si  $k = 0$ ,  $E_0()_q = 1$  n'a pas de racines à l'intérieur de  $D_{R_2}$ . Si  $k = 1$ ,  $E_1(c_1)_q = 1 + q + \dots + q^{c_1-1}$  est un polynôme cyclotomique et n'a pas de racines à l'intérieur de  $D_{R_2}$ .

- Hérité : D'après la formule (3.22), le polynôme  $E_k(c_1, \dots, c_k)_q$  satisfait la relation de récurrence

$$E_{k+1}(c_1, \dots, c_{k+1})_q = [c_{k+1}]_q E_k(c_1, \dots, c_k)_q - q^{c_k-1} E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q,$$

avec les valeurs initiales  $E_{-1}()_q = 0$  et  $E_0()_q = 1$ , que nous réécrivons comme suit

$$\frac{E_{k+1}(c_1, \dots, c_{k+1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q} = [c_{k+1}]_q - q^{c_k-1} \frac{E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q}. \quad (4.20)$$

D'après le théorème de Rouché, il suffit de prouver que, pour tout  $k$ , le polynôme  $[c_{k+1}]_q = \frac{1-q^{c_{k+1}}}{1-q}$  domine le deuxième terme de la partie droite de (4.20), lorsqu'il est restreint au cercle  $C_{R_2}$  :

$$\left| [c_{k+1}]_q \right|_{C_{R_2}} > R_2^{c_k-1} \left| \frac{E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q} \right|_{C_{R_2}}. \quad (4.21)$$

Puisque pour tout entier positif  $c$  le polynôme  $[c]_q$  n'a pas de racines dans  $D_{R_2}$ , nous concluons alors par récurrence que  $E_{k+1}(c_1, \dots, c_{k+1})_q$  n'a pas non plus de racines dans  $D_{R_2}$ .

Pour prouver (4.21), nous aurons besoin de la récurrence suivante.

**Lemme 4.4.11.** Si  $\left| \frac{E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q} \right|_{C_{R_2}} < \frac{1}{R_2^{\frac{1}{2}}}$ , alors  $\left| \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)_q}{E_{k+1}(c_1, \dots, c_{k+1})_q} \right|_{C_{R_2}} < \frac{1}{R_2^{\frac{1}{2}}}$ .

*Démonstration.* Nous allons procéder par récurrence sur  $k$ .

- Initialisation : Si  $k = 0$ , alors on a  $\left| \frac{E_{-1}()_q}{E_0()_q} \right|_{C_{R_2}} = \frac{0}{1} < \frac{1}{R_2^{\frac{1}{2}}}$ .

Aussi,  $\left| \frac{E_0()_q}{E_1(c_1)_q} \right|_{C_{R_2}} = \left| \frac{1}{[c_1]_q} \right|_{C_{R_2}} \leq \frac{1}{\binom{1+R_2}{0}} \leq \frac{1+R_2}{1-R_2^2} \stackrel{\text{calcul numérique}}{<} \frac{1}{R_2^{\frac{1}{2}}}$ .

- Hérité : En utilisant la récurrence (4.20), on a

$$\left| \frac{E_{k+1}(c_1, \dots, c_{k+1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q} \right|_{C_{R_2}} \geq \left| [c_{k+1}]_q \right|_{C_{R_2}} - R_2^{c_k-1} \left| \frac{E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q} \right|_{C_{R_2}}.$$

En utilisant le Lemme et l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$\left| \frac{E_{k+1}(c_1, \dots, c_{k+1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q} \right|_{C_{R_2}} > \frac{1 - R_2^{c_{k+1}}}{1 + R_2} - R_2^{c_k - \frac{3}{2}}.$$

Nous devons montrer que

$$\frac{1 - R_2^{c_{k+1}}}{1 + R_2} - R_2^{c_k - \frac{3}{2}} \geq R_2^{\frac{1}{2}},$$

ou de manière équivalente

$$1 - R_2^{c_{k+1}} - R_2^{c_k - \frac{1}{2}} - R_2^{c_k - \frac{3}{2}} - R_2^{\frac{3}{2}} - R_2^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

Puisque  $c_i \geq 2$  il suffit de vérifier que pour  $R = R_2$

$$1 - R^2 - 2R^{\frac{3}{2}} - 2R^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

Mais  $1 - R^2 - 2R^{\frac{3}{2}} - 2R^{\frac{1}{2}} = (1 + R)(1 - R - 2R^{\frac{1}{2}}) = 0$  quand  $R^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - 1 = R_2^{\frac{1}{2}}$ .  $\square$

Les lemmes et impliquent que l'inégalité (4.21) est garantie si

$$\frac{1 - R_2^{c_{k+1}}}{1 + R_2} \geq R_2^{c_k - \frac{3}{2}},$$

ce qui équivaut à

$$1 - R_2^{c_{k+1}} - R_2^{c_k - \frac{1}{2}} - R_2^{c_k - \frac{3}{2}} \geq 0.$$

En utilisant à nouveau  $c_i \geq 2$ , il suffit de vérifier que  $1 - R_2^2 - R_2^{\frac{3}{2}} - R_2^{\frac{1}{2}} \geq 0$ , ce qui est évident puisque  $1 - R_2^2 - R_2^{\frac{3}{2}} - R_2^{\frac{1}{2}} = R_2^{\frac{3}{2}} + R_2^{\frac{1}{2}}$ . Ceci complète la preuve de la Proposition et ainsi en découle celle du Théorème .

#### 4.4.3 Preuve de la Proposition

La preuve est identique à celle de la Proposition . Soit  $C_{R_\star}$  le cercle de rayon  $R_\star$ . Il suffit de prouver que pour tout  $k$  le polynôme  $E_k(c_1, \dots, c_k)_q$  n'a pas de racines à l'intérieur de  $D_{R_\star}$ .

Nous allons procéder par récurrence sur  $k$ .

- Initialisation : Si  $k = 0$ ,  $E_0()_q = 1$  n'a pas de racines à l'intérieur de  $D_{R_\star}$ . Si  $k = 1$ ,  $E_1(c_1)_q = 1 + q + \dots + q^{c_1 - 1}$  est un polynôme cyclotomique et n'a pas de racines à l'intérieur de  $D_{R_\star}$ .

- Hérité : Nous devons prouver que pour chaque  $k > 0$ , le polynôme  $[c_{k+1}]_q = \frac{1 - q^{c_{k+1}}}{1 - q}$  domine le deuxième terme de la partie droite de la formule (4.20), lorsqu'il est restreint au cercle  $C_{R_\star}$  :

$$\left| [c_{k+1}]_q \right|_{C_{R_\star}} > R_\star^{c_k - 1} \left| \frac{E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q} \right|_{C_{R_\star}}. \quad (4.22)$$

Nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.4.12.** Si  $\left| \frac{E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q} \right|_{C_{R_\star}} < \frac{1}{R_\star}$ , alors  $\left| \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)_q}{E_{k+1}(c_1, \dots, c_{k+1})_q} \right|_{C_{R_\star}} < \frac{1}{R_\star}$ .

*Démonstration.* Nous allons procéder par récurrence sur  $k$ .

- Initialisation : Si  $k = 0$ , alors on a  $\left| \frac{E_{-1}()_q}{E_0()_q} \right|_{C_{R_\star}} = \frac{0}{1} < \frac{1}{R_\star}$ .

Aussi,  $\left| \frac{E_0()_q}{E_1(c_1)_q} \right|_{C_{R_\star}} = \left| \frac{1}{[c_1]_q} \right|_{C_{R_\star}} \leq \frac{1 + R_\star}{1 - R_\star^{c_1}} \leq \frac{1 + R_\star}{1 - R_\star^2} \stackrel{\text{calcul numérique}}{<} \frac{1}{R_\star}$ .

- Hérité : En utilisant (4.20) et le Lemme , nous avons

$$\left| \frac{E_{k+1}(q)}{E_k(q)} \right|_{C_{R_\star}} > \frac{1 - R_\star^{c_{k+1}}}{1 + R_\star} - R_\star^{c_k - 2},$$

qui est supérieur à  $R_\star$ . En effet,

$$\frac{1 - R_\star^{c_k+1}}{1 + R_\star} - R_\star^{c_k-2} - R_\star = \frac{1 - R_\star^{c_k+1} - R_\star^{c_k-2} - R_\star^{c_k-1} - R_\star - R_\star^2}{1 + R_\star}.$$

Puisque  $c_i \geq 4$  pour tout  $i$ , on a

$$\frac{1 - R_\star^{c_k+1} - R_\star^{c_k-2} - R_\star^{c_k-1} - R_\star - R_\star^2}{1 + R_\star} \geq \frac{1 - R_\star^4 - R_\star^3 - 2R_\star^2 - R_\star}{1 + R_\star} = \frac{14 - 36R_\star}{1 + R_\star},$$

car  $R_\star^2 = 3R_\star - 1$ , et donc  $R_\star^3 = 8R_\star - 3$ , and  $R_\star^4 = 21R_\star - 8$ . On peut vérifier que  $14 - 36R_\star > 0$ ,  $\square$

D'après le lemme ci-dessus, nous avons que pour tous les  $k$

$$R_\star^{c_k-1} \left| \frac{E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q} \right|_{C_{R_\star}} < R_\star^{c_k-2}.$$

Et il s'avère que

$$R_\star^{c_k-2} < \frac{1 - R_\star^{c_k+1}}{1 + R_\star}.$$

En effet, sous nos hypothèses

$$1 - R_\star^{c_k+1} - R_\star^{c_k-1} - R_\star^{c_k-2} > 1 - R_\star^4 - R_\star^3 - R_\star^2,$$

qui est positif. Cela signifie que

$$\left| [c_{k+1}]_q \right|_{C_{R_\star}} \stackrel{(4.19)}{\geq} \frac{1 - R_\star^{c_k+1}}{1 + R_\star} > R_\star^{c_k-2} > R_\star^{c_k-1} \left| \frac{E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q}{E_k(c_1, \dots, c_k)_q} \right|_{C_{R_\star}},$$

et nous pouvons appliquer le théorème de Rouché pour compléter la preuve de la Proposition et ainsi en découle celle du Théorème .

**Remarque 4.4.13.** Notons qu'en utilisant l'approche adoptée nous ne pouvons pas améliorer l'hypothèse sur les  $c_i$ . En effet, supposer  $c_i \geq 3$  dans le Lemme , nous amène dans la preuve à la quantité  $3 - 8R_\star$ , qui est négative.

## 4.5 Preuve du Théorème

Nous prouvons dans cette partie les résultats qui élargissent les travaux faits précédemment, sur une classe particulière de nombres : les irrationnels quadratiques possédant un développement en fraction continue purement périodique.

On rappelle que d'après §, si  $x$  un nombre irrationnel quadratique, alors  $[x]_q = \frac{\mathcal{R} \pm \sqrt{\mathcal{P}}}{S}$  dont nous connaissons les expressions explicites des polynômes  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}$  (voir Proposition ).

Sans perte de généralité, nous allons démontrer le Théorème dans le cas où  $x$  est purement périodique. En effet, si on le prouve pour  $x$  un irrationnel quadratique purement périodique ( $x = \llbracket \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$ ), alors tous les nombres  $y$  qui lui sont  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -équivalents sont de la forme  $y = \llbracket b_1, \dots, b_l, \overline{c_1, \dots, c_k} \rrbracket$  et vérifient également le théorème. Cela repose sur le fait qu'entre  $x$  et  $y$  nous devons étudier la même irrationalité quadratique : le polynôme  $\mathcal{P}$  sous la racine dans l'écriture de la Proposition d'un  $q$ -irrationnel quadratique. Pour prouver cela il suffit de regarder ce qu'il se passe lorsque nous faisons agir les matrices  $R$  et  $S$  sur  $x$ .

Puisque  $[Rx]_q = q[x]_q + 1$ , ce cas est trivial.

Étudions  $[Sx]_q = \frac{-1}{q[x]_q} = \frac{-S}{q(\mathcal{R} \pm \sqrt{\mathcal{P}})} = -\frac{\mathcal{R} \mp \sqrt{\mathcal{P}}}{q \times \left(\frac{\mathcal{R}^2 - \mathcal{P}}{S}\right)}$ . Grâce aux expressions de  $\mathcal{R}$ ,  $S$  et  $\mathcal{P}$

de la Proposition , un calcul immédiat donne que  $\frac{\mathcal{R}^2 - \mathcal{P}}{S} = 2q^{c_k-1}E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})$ .

Ainsi,  $[Sx]_q = \frac{-\mathcal{R} \pm \sqrt{\mathcal{P}}}{2q^{c_k}E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})}$  et nous retrouvons l'expression "classique" d'un irrationnel quadratique, avec au dénominateur un continuant pour lequel nous savons qu'il n'a pas de racine dans  $D_{R_2}$  (ou  $D_{R_\star}$  selon les conditions sur les  $c_i$ ) et au numérateur nous retrouvons le polynôme  $\mathcal{P}$  sous la racine.

**Théorème 4.5.1.** *Si  $x$  est un nombre irrationnel quadratique qui possède un développement en fraction continue négative de l'une des trois formes suivantes :*

- (i)  $x = \overline{[c_1]}$  avec  $c_1 \geq 3$ ;
- (ii)  $x = \overline{[c_1, c_2]}$  avec  $c_1, c_2 \geq 2$ ;
- (iii)  $x = \overline{[c_1, c_2, \dots, c_k]}$  avec  $c_i \geq 4$  pour tout  $i$ ,  $k \geq 3$ ;

Alors la série  $[x]_q$  a un rayon de convergence supérieur ou égal à  $R_\star$ .

Dans le théorème énoncé ci-dessus, la preuve du point (iii) démontrera le Théorème . Les points (i) et (ii) sont deux petits "bonus" qui donnent plus de liberté sur les coefficients lorsque  $k = 1$  et  $k = 2$ .

Nous allons effectuer dans les sous-sections suivantes les démonstrations de chacun des points de ce théorème. Pour trouver le rayon de convergence d'une telle expression, nous devons extraire la plus petite racine (en valeur absolue) des polynômes  $\mathcal{P}$  ou  $\mathcal{R}$ . Or nous savons déjà d'après la Proposition que  $\mathcal{R}$  est un continuant et que, selon les conditions dans lesquelles nous nous trouvons, les propositions et disent que les continuants n'ont pas de racines dans  $D_{R_\star}$ . Il nous suffira alors d'appliquer le théorème de Rouché sur le polynôme  $\mathcal{P}$  pour prouver les résultats.

Nous pouvons reformuler cela à l'aide de la proposition suivante.

**Proposition 4.5.2.** *En utilisant la notation introduite dans la Remarque , les polynômes :*

- $\mathcal{P}(c_1)$  avec  $c_1 \geq 3$ ;
- $\mathcal{P}(c_1, c_2)$  avec  $c_1, c_2 \geq 2$ ;
- $\mathcal{P}(c_1, \dots, c_k)$  avec  $c_i \geq 4$  pour tout  $i$ ;

n'ont pas de racine dans  $D_{R_\star}$ .

#### 4.5.1 Cas 1-périodique

Nous commençons par démontrer le (i) de la Proposition , qui a pour conséquence immédiate du (i) du Théorème concernant les irrationnels quadratiques purement périodiques de période 1 :  $x = \overline{[c]}_q$ .

• Pour  $c = 3$ ,  $[[3]]_q = \frac{q^2 + q + 1 + \sqrt{q^4 + 2q^3 - q^2 + 2q + 1}}{2} = \frac{q^2 + q + 1 + \sqrt{(q^2 - q + 1)(q^2 + 3q + 1)}}{2}$   
donc par un calcul immédiat des racines de  $\mathcal{P}(3) = q^2 + 3q + 1$ , on obtient que  $R([[3]]_q) \approx 0.3819660112$ , ceci implique que  $\mathcal{P}(3)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ .

• Pour tout  $c \geq 4$ ,  $[[c]]_q = \frac{\mathcal{R} + \sqrt{\mathcal{P}(c)}}{2}$  où  $\mathcal{P}(c) = E_1(c)^2 - 4q^{c-1}$ .

On sait que  $E_1(c)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$  (car  $E_1(c) = [c]_q$  qui est un polynôme cyclotomique), par conséquent,  $E_1(c)^2$  n'en a pas non plus.

Pour tout  $q \in C_{R_\star}$  et en notant (pour alléger l'écriture)  $R = R_\star$ , on a :

$$|E_1(c)| = |[c]_q| \underset{(4.19)}{\geq} \frac{1 - R^c}{1 + R} \geq \frac{1 - R^4}{1 + R} > \underset{\approx 0,472}{2R^{\frac{3}{2}}} \geq |2q^{\frac{c-1}{2}}|$$

Ainsi  $|E_1(c)|^2 > |4q^{c-1}|$  donc d'après le théorème de Rouché,  $\mathcal{P}(c)$  n'a pas non plus de racine dans  $D_{R_\star}$ . Ceci prouve alors (i) de la Proposition qui implique (i) du Théorème .

#### 4.5.2 Cas 2-périodique

À présent nous démontrons (ii) de la Proposition , qui a pour conséquence immédiate (ii) du Théorème .

On va supposer dans cette preuve que  $a < b$ , car ici  $\mathcal{P}(a, b) = (E_2(a, b) - q^{b-1})^2 - 4q^{a+b-2}$  est un polynôme symétrique en  $a$  et  $b$ .

• Si  $a \geq 3$  et  $b \geq 4$  : D'après la proposition ,  $E_2(a, b)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ .

Montrons que  $|E_2(a, b)| > |q^{b-1}|$ . Pour tout  $q \in C_{R_\star}$ , et on note  $R = R_\star$  :

$$\begin{aligned} |E_2(a, b)| &= |[a]_q [b]_q - q^{a-1}| \underset{(4.19)}{\geq} \left( \frac{1 - R^a}{1 + R} \right) \left( \frac{1 - R^b}{1 + R} \right) - R^{a-1} \\ &\geq \left( \frac{1 - R^3}{1 + R} \right) \left( \frac{1 - R^4}{1 + R} \right) - R^2 \\ &\geq \frac{308R - 117}{5R} \geq \frac{315R - 120}{5R} \quad (\text{évaluation numérique}) \\ &\geq \frac{3R^4}{R} \geq 3R^3 > R^3 \geq |q^{b-1}| \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de Rouché,  $E_2(a, b) - q^{b-1}$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ , et par conséquent  $(E_2(a, b) - q^{b-1})^2$  non plus.

Montrons maintenant que  $|(E_2(a, b) - q^{b-1})^2| > |4q^{a+b-2}|$ . Pour tout  $q \in C_{R_\star}$ , et on note

$R = R_\star$  :

$$\begin{aligned}
 |E_2(a, b) - q^{b-1}| &= |[a]_q [b]_q - q^{a-1} - q^{b-1}| \stackrel{(4.19)}{\geq} \left( \frac{1-R^a}{1+R} \right) \left( \frac{1-R^b}{1+R} \right) - R^{a-1} - R^{b-1} \\
 &\geq \left( \frac{1-R^3}{1+R} \right) \left( \frac{1-R^4}{1+R} \right) - R^2 - R^3 \\
 &\geq \frac{203R - 77}{5R} \approx 0,282276 \\
 &> 2R^{\frac{5}{2}} \approx 0,18033 \\
 &\geq \left| 2q^{\frac{a+b-2}{2}} \right|
 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Rouché,  $\mathcal{P}(a, b)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ .

• Si  $a = 2$  et  $b \geq 4$  : D'après la Proposition ,  $E_2(a, b)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ .

Montrons que  $|E_2(2, b)| > |q^{b-1}|$ . Pour tout  $q \in C_{R_\star}$ , et on note  $R = R_\star$  :

$$|E_2(2, b)| \geq 0,48165544 > R^3 = |q^{b-1}|$$

Donc d'après le théorème de Rouché,  $E_2(2, b) - q^{b-1}$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ , et par conséquent  $(E_2(2, b) - q^{b-1})^2$  non plus.

Montrons maintenant que  $|(E_2(2, b) - q^{b-1})^2| > |4q^b|$ . Pour tout  $q \in C_{R_\star}$ , et en notant  $R = R_\star$  :

$$\begin{aligned}
 |E_2(2, b) - q^{b-1}| &= |(q^2 + 1)[b - 1]| \geq (1 - R^2) \left( \frac{1 - R^3}{1 + R} \right) \approx 0,5835921 \\
 &> 2R^2 = |2q^{\frac{b}{2}}|
 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Rouché,  $\mathcal{P}(a, b)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ .

• Si  $a = 2$  et  $b = 3$  :  $\mathcal{P} = q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 3q^2 + 2q + 1$  et la valeur absolue minimale de ses racines est environ 0.527755. Donc  $\mathcal{P}(2, 3)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_\star}$ .

Ceci prouve alors (ii) de la Proposition qui implique (ii) du Théorème .

### 4.5.3 Cas $k$ -périodique

Nous démontrons finalement (iii) de la Proposition , qui a pour conséquence immédiate (iii) du Théorème , qui entraînera à son tour, la preuve du Théorème (par  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -équivalence comme mentionné dans l'introduction du §).

On sait (d'après (3.21)) que  $E_k(c_1, \dots, c_k) = [c_1]_q E_{k-1}(c_2, \dots, c_k) - q^{c_1-1} E_{k-2}(c_3, \dots, c_k)$ .

Ainsi, on a :

$$\frac{E_k(c_1, \dots, c_k)}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} = [c_1]_q - q^{c_1-1} \frac{E_{k-2}(c_3, \dots, c_k)}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)}. \quad (4.23)$$

Ici,  $\mathcal{P}(c_1, \dots, c_k) = (E_k(c_1, \dots, c_k) - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1}))^2 - 4q^{\sum_{i=1}^k (c_i-1)}$ .

Pour tout  $q \in C_{R_\star}$ , et on note  $R = R_\star$ , on a :

• Comme  $c_i \geq 4$ , on peut appliquer le Lemme ainsi que (4.19) sur (4.23). On obtient ainsi d'une part

$$\left| \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right| \geq \frac{1 - R^{c_1}}{1 + R} - R^{c_1-1} \times \frac{1}{R} \geq \frac{1 - R^4}{1 + R} - R^2 \geq R$$

et

• d'autre part

$$\left| q^{c_k-1} \frac{E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right| \leq \frac{R^{c_k-1}}{R} \leq \frac{R^3}{R} = R^2$$

Finalement,  $\left| \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right| \geq R > R^2 \geq \left| q^{c_k-1} \frac{E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right|$  et d'après le théorème de Rouché,  $E_k(c_1, \dots, c_k) - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})$  n'a pas de racine dans  $D_{R^*}$ , et le polynôme  $(E_k(c_1, \dots, c_k) - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1}))^2$  non plus.

Enfin, pour tout  $q \in C_{R^*}$ , et on note  $R = R_*$ , on a :

• D'une part

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} - q^{c_k-1} \frac{E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right| &\geq R - R^{c_k-1} \times \frac{1}{R} \\ &\geq R - R^{c_k-2} \\ &\geq R - R^2 \approx 0,236067... \end{aligned}$$

• D'autre part

$$\begin{aligned} \left| \frac{2q^{\frac{c_1+\dots+c_k-k}{2}}}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right| &\leq \frac{2R^{\frac{c_1+\dots+c_k-k}{2}}}{R^{k-2} |[c_2]_q|} \\ &\leq \frac{2R^{\frac{c_1+\dots+c_k-3k+4}{2}}}{\frac{1 - R^{c_2}}{1 + R}} \\ &\stackrel{(c_i \geq 4)}{\leq} \frac{2(1 + R)R^{\frac{4k-3k+4}{2}}}{1 - R^4} \\ &\stackrel{(k \geq 2)}{\leq} \frac{2(1 + R)R^3}{1 - R^4} \approx 0,15737... \end{aligned}$$

Ces inégalités impliquent que  $|E_k(c_1, \dots, c_k) - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})|^2 > \left| 4q^{\sum_{i=1}^n (c_i-1)} \right|$ . En appliquant une nouvelle fois le théorème de Rouché, on en déduit que  $\mathcal{P}(c_1, \dots, c_k)$  n'a pas de racine dans  $D_{R^*}$ . Ainsi (iii) de la Proposition est prouvé, ce qui implique (iii) du Théorème et qui entraîne finalement le Théorème (par  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  – équivalence comme mentionné dans l'introduction du §).

## 4.6 Preuve du Théorème

De même que dans la section précédente, nous allons prouver le Théorème dans le cas où  $x$  est un nombre irrationnel purement périodique, puisque cela impliquera le théorème pour tous

les nombres qui lui sont  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -équivalents.

De la même manière également, nous pouvons simplifier l'étude des irrationalités quadratiques de ces nombres en étudiant uniquement les racines du polynôme  $\mathcal{P}(c_1, \dots, c_k)$  dans l'expression obtenue de la Proposition . Nous allons pour cela démontrer la proposition suivante, qui impliquera immédiatement la preuve du Théorème .

**Proposition 4.6.1.** *En utilisant la notation introduite dans la Remarque , les polynômes  $\mathcal{P}(c_1, \dots, c_k)$  avec  $c_i \geq 2$  pour tout  $i$  n'ont pas de racine dans  $D_{R_2}$ .*

Nous reprenons exactement les mêmes inégalités qu'à la section précédente, nous utiliserons juste le Lemme au lieu du Lemme avec des  $c_i \geq 2$ .

On utilise la relation (3.21) :  $E_k(c_1, \dots, c_k) = [c_1]_q E_{k-1}(c_2, \dots, c_k) - q^{c_1-1} E_{k-2}(c_3, \dots, c_k)$ .

Ainsi, on a de nouveau la relation (4.23) :

$$\frac{E_k(c_1, \dots, c_k)}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} = [c_1]_q - q^{c_1-1} \frac{E_{k-2}(c_3, \dots, c_k)}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)}$$

Ici,  $\mathcal{P}(c_1, \dots, c_k) = (E_k(c_1, \dots, c_k) - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1}))^2 - 4q^{\sum_{i=1}^k (c_i-1)}$ .

Pour tout  $q \in C_{R_2}$ , et on note  $R = R_2$ , on a :

• Comme  $c_i \geq 2$ , on peut appliquer le Lemme ainsi que (4.19) sur (4.23). On peut supposer par défaut que  $c_k \geq 3$  et  $c_i \geq 2$  pour tout  $i \in \llbracket 1, \dots, k-1 \rrbracket$ , car le cas  $(c_1, \dots, c_k) = (2, \dots, 2)$  redonne  $\varphi$ . On obtient ainsi d'une part

$$\left| \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right| \geq \frac{1 - R^{c_1}}{1 + R} - R^{c_1-1} \times \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1 - R^2}{1 + R} - R^{\frac{1}{2}} \approx 0.414213\dots$$

et

• d'autre part

$$\left| q^{c_k-1} \frac{E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right| \leq \frac{R^{c_k-1}}{R^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{R^2}{R^{\frac{1}{2}}} = R^{\frac{3}{2}} \approx 0.071067\dots$$

Finalement,  $\left| \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right| \geq \frac{1 - R^2}{1 + R} - R^{\frac{1}{2}} > R^{\frac{3}{2}} \geq \left| q^{c_k-1} \frac{E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right|$  et d'après le théorème de Rouché,  $E_k(c_1, \dots, c_k) - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})$  n'a pas de racine dans  $D_{R_2}$ , et le polynôme  $(E_k(c_1, \dots, c_k) - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1}))^2$  non plus.

Enfin, pour tout  $q \in C_{R_2}$ , et on note  $R = R_2$ , on a :

• D'une part

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} - q^{c_k-1} \frac{E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right| &\geq R^{\frac{1}{2}} - R^{c_k-1} \times \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \\ &\geq R^{\frac{1}{2}} - R^{c_k-\frac{3}{2}} \\ &\geq R^{\frac{1}{2}} - R^{\frac{3}{2}} \approx 0,343145\dots \end{aligned}$$

• D'autre part

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2q^{\frac{c_1+\dots+c_k-k}{2}}}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)} \right| &\leq \frac{2R^{\frac{c_1+\dots+c_k-k}{2}}}{R^{\frac{k-2}{2}} |[c_2]_q|} \\
&\leq \frac{2R^{\frac{c_1+\dots+c_k-2k+2}{2}}}{\frac{1-R^{c_2}}{1+R}} \\
&\leq \frac{2(1+R)R^{\frac{2k+1-2k+2}{2}}}{1-R^2} \quad (\text{car } c_k \geq 3 \text{ et } c_i \geq 2) \\
&\leq \frac{2(1+R)R^{\frac{3}{2}}}{1-R^2} \approx 0,171572\dots
\end{aligned}$$

Ces inégalités impliquent que  $|E_k(c_1, \dots, c_k) - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})|^2 > \left| 4q^{\sum_{i=1}^k (c_i-1)} \right|$ . En appliquant une nouvelle fois le théorème de Rouché, on en déduit que  $\mathcal{P}(c_1, \dots, c_k)$  n'a pas de racine dans  $D_{R_2}$ . Ainsi la Proposition est prouvée, ce qui implique le Théorème (par  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -équivalence comme mentionné dans l'introduction du §).

## 4.7 Exemples de $q$ -réels

### 4.7.1 $q$ -irrationnels quadratiques

Nous étudions des exemples d'irrationnels quadratiques avec de courts développements périodiques en fractions continues.

**Exemple 4.7.1.** Considérons les irrationnels quadratiques qui possèdent un développement en fractions continues négatives purement périodiques, de période 1 :

$$x = \llbracket \bar{c} \rrbracket = c - \frac{1}{c - \frac{1}{c - \frac{1}{\ddots}}} \quad \text{avec } c \geq 3.$$

On obtient alors

$$x = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4}}{2}.$$

La  $q$ -déformation de cette expression conduit à

$$[x]_q = \frac{[c]_q + \sqrt{[c]_q^2 - 4q^{c-1}}}{2}.$$

En effet,

$$[x]_q = [c]_q - \frac{q^{c-1}}{[c]_q - \frac{q^{c-1}}{[c]_q - \frac{q^{c-1}}{\ddots}}} = [c]_q - \frac{q^{c-1}}{[x]_q}.$$

Par exemple pour  $c = 3$  on obtient

$$\left[ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]_q = \frac{1 + q + q^2 + \sqrt{1 + 2q - q^2 + 2q^3 + q^4}}{2} = \frac{1 + q + q^2 + \sqrt{(1 - q + q^2)(1 + 3q + q^2)}}{2}.$$

À partir de  $c \geq 4$  le polynôme  $[c]_q^2 - 4q^{c-1}$  sous la racine a des coefficients positifs.

**Exemple 4.7.2.** Considérons les irrationnels quadratiques qui possèdent un développement en fractions continues régulières purement périodiques, de période 1 :

$$x = [\bar{a}] = a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{\ddots}}} = a + \frac{1}{x} \quad \text{avec } a \geq 1.$$

On obtient alors

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Écrivons

$$[x]_q = [a, \bar{a}]_q = [a]_q + \frac{q^a}{[a]_{q^{-1}} + \frac{1}{[x]_q}},$$

on a alors

$$\begin{aligned} [x]_q &= \frac{q[a]_q + (q^a + 1)(q - 1) + \sqrt{(q[a]_q + (q^a + 1)(q - 1))^2 + 4q}}{2q} \\ &= \frac{q[a]_q + (q^a + 1)(q - 1) + \sqrt{(1 - q + q^2)([a + 1]_q^2 - q[2a - 1]_q + 2q^a)}}{2q}. \end{aligned}$$

Pour  $a = 1, 2, 3, 4$ , on obtient respectivement

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]_q &= \frac{q^2 + q - 1 + \sqrt{(1 - q + q^2)(1 + 3q + q^2)}}{2q} \\ [1 + \sqrt{2}]_q &= \frac{q^3 + 2q - 1 + \sqrt{(1 - q + q^2)(1 + q + 4q^2 + q^3 + q^4)}}{2q} \\ \left[ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right]_q &= \frac{q^4 + q^2 + 2q - 1 + \sqrt{(1 - q + q^2)(1 + q + 2q^2 + 5q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6)}}{2q} \\ [2 + \sqrt{5}]_q &= \frac{q^5 + q^3 + q^2 + 2q - 1 + \sqrt{(1 - q + q^2)(1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 6q^4 + 3q^5 + 2q^6 + q^7 + q^8)}}{2q}. \end{aligned}$$

Le polynôme sous le radical se factorise comme suit

$$(1 - q + q^2)(q^{2a} + q^{2a-1} + 2q^{2a-2} + \dots + (a - 1)q^{a+1} + (a + 2)q^a + (a - 1)q^{a-1} + \dots + 2q^2 + q + 1)$$

et à partir de  $a \geq 4$  il a des coefficients positifs.

**Exemple 4.7.3.** Considérons les irrationnels quadratiques qui possèdent un développement en fractions continues régulières purement périodiques, de période 2 :

$$x = [\overline{a, b}] = a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{\ddots}}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{x}} \quad \text{avec } a, b \geq 1.$$

On obtient alors

$$x = \frac{ab + \sqrt{(ab)^2 + 4ab}}{2b}.$$

Écrivons

$$[x]_q = [a, \bar{b}]_q = [a]_q + \frac{q^a}{[b]_{q^{-1}} + \frac{q^{-b}}{[x]_q}},$$

on a alors

$$[x]_q = \frac{q[a]_q[b]_b + q^{a+b} - 1 + \sqrt{(q[a]_q[b]_b + q^{a+b} - 1)^2 + 4q[a]_q[b]_q}}{2q[b]_q}.$$

Nous listons ci-dessous les polynômes obtenus sous la racine pour différentes valeurs de  $a$  et  $b$  :

- $a = 1, b = 2 \left( x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) : q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 3q^2 + 2q + 1$
- $a = 1, b = 3 \left( x = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \right) : q^8 + 2q^7 + 3q^6 + 4q^5 + q^4 + 3q^2 + 2q + 1 = (q^4 + q^3 + 3q^2 + q + 1)(q^4 + q^3 - q^2 + q + 1)$
- $a = 1, b = 4 \left( x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right) : q^{10} + 2q^9 + 3q^8 + 4q^7 + 5q^6 + 2q^5 + 5q^4 + 4q^3 + 3q^2 + 2q + 1$
- $a = 1, b = 5 \left( x = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \right) : q^{12} + 2q^{11} + 3q^{10} + 4q^9 + 5q^8 + 6q^7 + 3q^6 + 6q^5 + 5q^4 + 4q^3 + 3q^2 + 2q + 1 = (q^6 + q^5 + q^4 + 3q^3 + q^2 + q + 1)(q^6 + q^5 + q^4 - q^3 + q^2 + q + 1)$
- $a = 2, b = 1 \left( x = 1 + \sqrt{3} \right) : q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 3q^2 + 2q + 1$
- $a = 2, b = 3 \left( x = \frac{3 + \sqrt{15}}{3} \right) : q^{10} + 2q^9 + 5q^8 + 8q^7 + 10q^6 + 8q^5 + 10q^4 + 8q^3 + 5q^2 + 2q + 1$
- $a = 2, b = 4 \left( x = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right) : q^{10} + 4q^8 + 8q^6 - 2q^5 + 8q^4 + 4q^2 + 1 = (q^4 - q^3 + 3q^2 - q + 1)(q^6 + q^5 + 2q^4 + 2q^2 + q + 1)$
- $a = 2, b = 5 \left( x = \frac{5 + \sqrt{35}}{5} \right) : q^{14} + 2q^{13} + 5q^{12} + 8q^{11} + 12q^{10} + 16q^9 + 18q^8 + 16q^7 + 18q^6 + 16q^5 + 12q^4 + 8q^3 + 5q^2 + 2q + 1$
- $a = 3, b = 1 \left( x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right) : q^8 + 2q^7 + 3q^6 + 4q^5 + q^4 + 4q^3 + 3q^2 + 2q + 1 = (q^4 + q^3 - q^2 + q + 1)(q^4 + q^3 + 3q^2 + q + 1)$
- $a = 3, b = 2 \left( x = \frac{3 + \sqrt{15}}{2} \right) : q^{10} + 2q^9 + 5q^8 + 8q^7 + 10q^6 + 8q^5 + 10q^4 + 8q^3 + 5q^2 + 2q + 1$

$$\bullet a = 3, b = 4 \left( x = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \right) : q^{14} + 2q^{13} + 5q^{12} + 10q^{11} + 16q^{10} + 22q^9 + 27q^8 + 26q^7 + 27q^6 + 22q^5 + 16q^4 + 10q^3 + 5q^2 + 2q + 1$$

$$\bullet a = 3, b = 5 \left( x = \frac{15 + \sqrt{285}}{10} \right) : q^{16} + 2q^{15} + 5q^{14} + 10q^{13} + 16q^{12} + 24q^{11} + 31q^{10} + 36q^9 + 35q^8 + 36q^7 + 31q^6 + 24q^5 + 16q^4 + 10q^3 + 5q^2 + 2q + 1 = (q^8 + q^7 + 2q^6 + 3q^5 + q^4 + 3q^3 + 2q^2 + q + 1)(q^8 + q^7 + 2q^6 + 3q^5 + 5q^4 + 3q^3 + 2q^2 + q + 1)$$

**Exemple 4.7.4.** Listons ci-dessous les polynômes obtenus sous la racine dans la  $q$ -déformation de  $\sqrt{n}$  pour les premières valeurs de  $n$  :

$$[\sqrt{2}]_q : q^6 + 4q^4 - 2q^3 + 4q^2 + 1 = (q^2 - q + 1)(q^4 + q^3 + 4q^2 + q + 1)$$

$$[\sqrt{3}]_q : q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 3q^2 + 2q + 1$$

$$[\sqrt{5}]_q : q^{10} + 2q^8 + 2q^7 + 5q^6 + 5q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 1 = (q^2 - q + 1)(q^8 + q^7 + 2q^6 + 3q^5 + 6q^4 + 3q^3 + 2q^2 + q + 1)$$

$$[\sqrt{6}]_q : q^{10} + 4q^8 + 8q^6 - 2q^5 + 8q^4 + 4q^2 + 1 = (q^4 - q^3 + 3q^2 - q + 1)(q^6 + q^5 + 2q^4 + 2q^2 + q + 1)$$

$$[\sqrt{7}]_q : q^{10} + 2q^9 + q^8 + 4q^7 + 6q^6 + 6q^4 + 4q^3 + q^2 + 2q + 1$$

$$[\sqrt{8}]_q : q^{10} + 2q^9 + 3q^8 + 4q^7 + 5q^6 + 2q^5 + 5q^4 + 4q^3 + 3q^2 + 2q + 1$$

$$[\sqrt{10}]_q : q^{14} + 2q^{12} + 2q^{11} + 3q^{10} + 4q^9 + 7q^8 + *q^7 + 7q^6 + 4q^5 + 3q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 1 = (q^2 - q + 1)(q^{12} + q^{11} + 2q^{10} + 3q^9 + 4q^8 + 5q^7 + 8q^6 + 5q^5 + 4q^4 + 3q^3 + 2q^2 + q + 1)$$

$$[\sqrt{11}]_q : q^{14} + 2q^{12} + 4q^{11} + q^{10} + 6q^9 + 8q^8 + 8q^6 + 6q^5 + q^4 + 4q^3 + 2q^2 + 1$$

Sur tous les exemples que nous avons calculés, nous observons que lorsque que le polynôme  $\mathcal{P}$  du Théorème se factorise, un des facteurs est toujours à coefficients positifs.

#### 4.7.2 Le nombre d'argent $q$ -déformé

Le nombre  $1 + \sqrt{2} = [2, 2, 2, 2, \dots]$  est souvent appelé le nombre d'argent. Il est noté  $\delta_S$ , et ses convergents sont donnés par le quotient de nombres de Pell consécutifs. C'est probablement l'exemple le plus simple de fraction continue infinie après le nombre d'or.

La formule (3.1) implique la  $q$ -déformation suivante

$$[\delta_S]_q = 1 + q + \frac{q^4}{q + q^2 + \frac{1}{1 + q + \frac{q^4}{q + q^2 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (4.24)$$

Le processus de stabilisation va deux fois plus vite que pour le nombre d'or : il faut le  $n$ -ième convergent pour calculer  $[\delta_S]_q$  avec une précision allant jusqu'à  $q^{2n}$ . La série  $[\delta_S]_q$  commence comme suit

$$\begin{aligned} [\delta_S]_q &= 1 + q + q^4 - 2q^6 + q^7 + 4q^8 - 5q^9 - 7q^{10} + 18q^{11} + 7q^{12} - 55q^{13} + 18q^{14} \\ &\quad + 146q^{15} - 155q^{16} - 322q^{17} + 692q^{18} + 476q^{19} - 2446q^{20} + 307q^{21} \\ &\quad + 7322q^{22} - 6276q^{23} - 18277q^{24} + 33061q^{25} + 33376q^{26} - 129238q^{27} - 10899q^{28} \dots \end{aligned}$$

On voit que les coefficients croissent beaucoup plus lentement que ceux de  $[\varphi_n]_q$ . Cette suite de coefficients n'est pas dans OEIS.

**Proposition 4.7.5.** ([44]) La série  $[\delta_S]_q$  satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$q[\delta_S]_q^2 - (q^3 + 2q - 1)[\delta_S]_q - 1 = 0. \quad (4.25)$$

*Démonstration.* La formule (4.25) réécrite sous la forme

$$[\delta_S]_q = 1 + q + \frac{q^4}{q + q^2 + \frac{1}{[\delta_S]_q}}$$

implique facilement (4.25). □

L'équation (4.25) est un  $q$ -analogue de  $\delta_S^2 = 2\delta_S + 1$ , l'apparition de  $q^3$  dans cette formule est quelque peu surprenante. En résolvant (4.25), on obtient

$$[\delta_S]_q = \frac{q^3 + 2q - 1 + \sqrt{q^6 + 4q^4 - 2q^3 + 4q^2 + 1}}{2q}. \quad (4.26)$$

### 4.7.3 Les $q$ -racines carrées de 2, 3, 5 et 7

Voici les  $q$ -analogue des premières racines carrées. Rappelons que  $\sqrt{2} = [1, \bar{2}]$ ,  $\sqrt{3} = [1, \bar{1}, \bar{2}]$ ,  $\sqrt{5} = [2, \bar{4}]$ ,  $\sqrt{7} = [2, \bar{1}, \bar{1}, \bar{4}]$ . Les séries commencent comme suit

$$\begin{aligned} [\sqrt{2}]_q &= 1 + q^3 - 2q^5 + q^6 + 4q^7 - 5q^8 - 7q^9 + 18q^{10} + 7q^{11} - 55q^{12} + 18q^{13} \\ &\quad + 146q^{14} - 155q^{15} - 322q^{16} + 692q^{17} + 476q^{18} - 2446q^{19} + 307q^{20} \\ &\quad + 7322q^{21} - 6276q^{22} - 18277q^{23} + 33061q^{24} + 33376q^{25} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\sqrt{3}]_q &= 1 + q^2 - q^4 + 2q^5 - 2q^6 - q^7 + 7q^8 - 12q^9 + 7q^{10} + 18q^{11} - 59q^{12} + 78q^{13} \\ &\quad - q^{14} - 228q^{15} + 514q^{16} - 469q^{17} - 506q^{18} + 2591q^{19} - 4338q^{20} \\ &\quad + 1837q^{21} + 9405q^{22} - 27430q^{23} + 33390q^{24} + 10329q^{25} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\sqrt{5}]_q &= 1 + q + q^6 - q^8 - q^9 - q^{10} + 3q^{11} + 4q^{12} - q^{13} - 6q^{14} - 11q^{15} + 2q^{16} \\ &\quad + 25q^{17} + 22q^{18} - 10q^{19} - 70q^{20} - 71q^{21} + 67q^{22} + 208q^{23} + 168q^{24} - 222q^{25} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\sqrt{7}]_q &= 1 + q + q^3 - q^4 + 2q^5 - 3q^6 + 4q^7 - 6q^8 + 8q^9 - 9q^{10} + 9q^{11} - 5q^{12} - 9q^{13} \\ &\quad + 40q^{14} - 101q^{15} + 215q^{16} - 411q^{17} + 724q^{18} - 1195q^{19} + 1845q^{20} \\ &\quad - 2623q^{21} + 3324q^{22} - 3412q^{23} + 1696q^{24} + 4157q^{25} \dots \end{aligned}$$

On remarque que les coefficients de  $[\sqrt{2}]_q$  sont ceux du nombre d'argent, mais la puissance de  $q$  est décalée de 1.

## 4.8 Rayons de convergence particuliers

Tous les résultats de cette section proviennent de notre article [40].

### 4.8.1 Le $q$ -nombre d'or et les racines des polynômes de Fibonacci

Nous prouvons ici que le rayon de convergence de  $[\varphi]_q$  est  $R_\star = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , et que toutes les racines des polynômes de Fibonacci appartiennent à l'anneau délimité par les cercles de rayon  $R_\star = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  et  $R_\star^{-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ . Ce résultat est en accord avec la Conjecture .

La  $q$ -déformation du nombre d'or  $\varphi$ , a été étudiée dans le §. Nous rappelons simplement que la série commence comme suit :

$$\begin{aligned} [\varphi]_q = & 1 + q^2 - q^3 + 2q^4 - 4q^5 + 8q^6 - 17q^7 + 37q^8 - 82q^9 + 185q^{10} \\ & - 423q^{11} + 978q^{12} - 2283q^{13} + 5373q^{14} - 12735q^{15} + 30372q^{16} \\ & - 72832q^{17} + 175502q^{18} - 424748q^{19} + 1032004q^{20} \dots \end{aligned}$$

**Proposition 4.8.1.** *Le rayon de convergence de la série  $[\varphi]_q$  est égal à  $R_\star$ .*

*Démonstration.* Nous savons d'après (4.17), que

$$[\varphi]_q = \frac{q^2 + q - 1 + \sqrt{(q^2 + 3q + 1)(q^2 - q + 1)}}{2q}. \quad (4.27)$$

Le nombre  $R_\star$  est la valeur absolue de la plus petite racine (c'est-à-dire la plus proche de 0) des polynômes sous le radical. En effet,

$$q^2 + 3q + 1 = (q + R_\star)(q + R_\star^{-1}),$$

et donc la série de Taylor converge pour  $|q| < R_\star$ . □

### Racines des polynômes de Fibonacci

L'objectif ici, est d'obtenir les limites des valeurs absolues des racines des polynômes de Fibonacci. Nous rappelons que les polynômes de Fibonacci ont été introduits et étudiés dans la Section .

Soit  $R_0 = 0.35320\dots$  la racine positive de l'équation

$$R^3 + 2R^2 + 2R - 1 = 0. \quad (4.28)$$

Soit  $D_0$  le disque et  $C_0$  le cercle de rayon  $R_0$  :

$$D_0 = \{q \in \mathbb{C}, |q| \leq R_0\}, \quad C_0 = \{q \in \mathbb{C}, |q| = R_0\}.$$

**Théorème 4.8.2.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les racines des polynômes de Fibonacci  $\mathcal{F}_n(q)$  et  $\tilde{\mathcal{F}}_n(q)$  appartiennent à l'anneau*

$$R_0 < |q| < R_0^{-1}.$$

Pour prouver ce théorème nous avons besoin du lemme suivant, dont la majoration explicitée sera constamment utilisée dans toutes les preuves des principaux résultats de ce chapitre.

*Démonstration.* La récurrence (3.27) peut être réécrite comme suit

$$\frac{\mathcal{F}_{n+2}(q)}{\mathcal{F}_n(q)} = [3]_q - q^2 \frac{\mathcal{F}_{n-2}(q)}{\mathcal{F}_n(q)}. \quad (4.29)$$

**Lemme 4.8.3.** *Supposons que  $\left| \frac{\mathcal{F}_{n-2}(q)}{\mathcal{F}_n(q)} \right|_{C_0} < \frac{1}{R_0}$ , alors  $\left| \frac{\mathcal{F}_n(q)}{\mathcal{F}_{n+2}(q)} \right|_{C_0} < \frac{1}{R_0}$ .*

*Démonstration.* En utilisant la récurrence (4.29), on a

$$\left| \frac{\mathcal{F}_{n+2}(q)}{\mathcal{F}_n(q)} \right|_{C_{R_0}} \geq |[3]_q|_{C_0} - R_0^2 \left| \frac{\mathcal{F}_{n-2}(q)}{\mathcal{F}_n(q)} \right|_{C_0}.$$

Le Lemme et l'hypothèse impliquent que

$$\left| \frac{\mathcal{F}_{n+2}(q)}{\mathcal{F}_n(q)} \right|_{C_0} > \frac{1 - R_0^3}{1 + R_0} - R_0.$$

Puisque, du fait de la définition de  $R_0$ , nous avons

$$\frac{1 - R_0^3}{1 + R_0} - R_0 = R_0,$$

□

Observons que, pour  $n = 2$ , nous avons  $\frac{\mathcal{F}_0(q)}{\mathcal{F}_2(q)} = \frac{1}{[2]_q}$ , et  $\frac{\mathcal{F}_1(q)}{\mathcal{F}_3(q)} = \frac{1}{[3]_q}$ . En utilisant, une fois de plus, le Lemme, nous avons  $\left| \frac{\mathcal{F}_0(q)}{\mathcal{F}_2(q)} \right|_{C_0} < \frac{1}{R_0}$  et  $\left| \frac{\mathcal{F}_1(q)}{\mathcal{F}_3(q)} \right|_{C_0} < \frac{1}{R_0}$ . Du Lemme, nous concluons par récurrence que  $\left| \frac{\mathcal{F}_{n-2}(q)}{\mathcal{F}_n(q)} \right|_{C_0} < \frac{1}{R_0}$  pour tout  $n \geq 2$ .

En particulier, nous avons que

$$|[3]_q|_{C_0} \geq \frac{1 - R_0^3}{1 + R_0} > R_0 > R_0^2 \left| \frac{\mathcal{F}_{n-2}(q)}{\mathcal{F}_n(q)} \right|_{C_0}. \quad (4.30)$$

Supposons maintenant que  $\mathcal{F}_{n-2}(q)$  et  $\mathcal{F}_n(q)$  n'ont pas de zéros à l'intérieur de  $D_0$ . Puisque le polynôme cyclotomique  $[3]_q = q^2 + q + 1$  n'a pas de racines à l'intérieur de  $D_0$ , alors d'après (4.29) et (4.30) par le théorème de Rouché, nous concluons que  $\mathcal{F}_{n+2}(q)$  n'a pas non plus de racines à l'intérieur de  $D_0$ . La récurrence complète la preuve de l'énoncé selon lequel les polynômes  $\mathcal{F}_n(q)$  n'ont pas de zéros à l'intérieur de  $D_0$ .

La preuve du même énoncé pour les polynômes  $\tilde{\mathcal{F}}_n(q)$  est similaire, puisque  $\tilde{\mathcal{F}}_n(q)$  satisfait également (3.27) avec les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_{2\ell+1} &= \tilde{\mathcal{F}}_{2\ell} + q^2 \tilde{\mathcal{F}}_{2\ell-1}, \\ \tilde{\mathcal{F}}_{2\ell+2} &= q \tilde{\mathcal{F}}_{2\ell+1} + \tilde{\mathcal{F}}_{2\ell}. \end{aligned}$$

Enfin, puisque les polynômes  $\mathcal{F}_n(q)$  et  $\tilde{\mathcal{F}}_n(q)$  sont des miroirs l'un de l'autre, cela implique que ces polynômes n'ont pas de racines en dehors du disque de rayon  $R_0^{-1}$ . Le Théorème est prouvé. □

**Remarque 4.8.4.** Les calculs informatiques que nous avons faits montrent que les racines des polynômes de Fibonacci se trouvent en fait dans le plus petit anneau

$$R_\star < |q| < R_\star^{-1},$$

mais nous ne pouvons pas encore le prouver.

### 4.8.2 $[\sqrt{2}]_q$ et les racines des polynômes de Pell

Le deuxième exemple que nous considérons est  $\sqrt{2}$ . La légère modification,  $\sqrt{2} + 1$ , présente quelques petits avantages, c'est pourquoi nous l'utilisons de nouveau dans la suite. Nous rappelons que les polynômes de Pell ont été introduits et étudiés dans la Section .

Les séries  $[\sqrt{2} + 1]_q$  et  $[\sqrt{2}]_q$  sont liées par la relation

$$[\sqrt{2} + 1]_q = q [\sqrt{2}]_q + 1$$

(cf. ()) et ont évidemment le même rayon de convergence ; nous préférons effectuer les calculs pour  $[\sqrt{2} + 1]_q$ .

Nous prouvons dans cette partie que le rayon de convergence des séries  $[\sqrt{2}]_q$  et  $[\sqrt{2} + 1]_q$  est égal à  $R_{\sqrt{2}}$  avec

$$R_{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \approx 0.53101, \quad (4.31)$$

et que les racines des polynômes dans les numérateurs et les dénominateurs de  $[\frac{P_{n+1}}{P_n}]_q$  appartiennent à l'anneau délimité par les cercles de rayon  $R_1$  et  $R_1^{-1}$ , avec  $R_1 \approx 0.43542$ . Ce résultat est en accord avec la Conjecture .

La  $q$ -déformation du nombre d'argent  $\sqrt{2} + 1$ , a été étudiée dans le §. Nous rappelons simplement que la série commence comme suit :

$$\begin{aligned} [\sqrt{2} + 1]_q &= 1 + q + q^4 - 2q^6 + q^7 + 4q^8 - 5q^9 - 7q^{10} + 18q^{11} + 7q^{12} - 55q^{13} + 18q^{14} \\ &\quad + 146q^{15} - 155q^{16} - 322q^{17} + 692q^{18} + 476q^{19} - 2446q^{20} + 307q^{21} \\ &\quad + 7322q^{22} - 6276q^{23} - 18277q^{24} + 33061q^{25} + 33376q^{26} - 129238q^{27} - 10899q^{28} \dots \end{aligned}$$

**Proposition 4.8.5.** *Le rayon de convergence de la série  $[\sqrt{2}]_q$  et  $[\sqrt{2} + 1]_q$  est égal à  $R_{\sqrt{2}}$ .*

*Démonstration.* Nous savons d'après (4.26) que :

$$[\sqrt{2} + 1]_q = \frac{q^3 + 2q - 1 + \sqrt{(q^4 + q^3 + 4q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)}}{2q}.$$

Le rayon de convergence (4.31) est égal au module de la racine du polynôme  $q^4 + q^3 + 4q^2 + q + 1$  la plus proche de zéro.  $\square$

#### Racines des polynômes de Pell

Soit  $R_1 = 0.43542\dots$  la plus petite racine positive de l'équation

$$R^4 - 2R^3 - 2R + 1 = 0. \quad (4.32)$$

Soit  $D_1$  le disque et  $C_1$  le cercle de rayon  $R_1$  :

$$D_1 = \{q \in \mathbb{C}, |q| \leq R_1\}, \quad C_1 = \{q \in \mathbb{C}, |q| = R_1\}.$$

**Théorème 4.8.6.** *Les racines des polynômes de Pell  $\mathcal{P}_n(q)$  et  $\tilde{\mathcal{P}}_n(q)$  appartiennent à l'anneau*

$$R_1 < |q| < R_1^{-1}.$$

*Démonstration.* La preuve est similaire au cas de Fibonacci. La récurrence (3.30) conduit à

$$\frac{\mathcal{P}_{n+2}(q)}{\mathcal{P}_n(q)} = \binom{4}{2}_q - q^4 \frac{\mathcal{P}_{n-2}(q)}{\mathcal{P}_n(q)}, \quad (4.33)$$

où  $\binom{4}{2}_q = (q^2+1)(q^2+q+1)$ . Sur le cercle  $C_R$  de rayon  $R$  on a  $|1+q^2| \geq 1-R^2$  et  $|q^2+q+1| \geq \frac{1-R^3}{1+R}$  comme précédemment. Ainsi, sur  $C_R$ , on a

$$\left| \binom{4}{2}_q \right| \geq \frac{(1-R^3)(1-R^2)}{1+R} = (1-R^3)(1-R). \quad (4.34)$$

**Lemme 4.8.7.** *Supposons que  $\left| \frac{\mathcal{P}_{n-2}(q)}{\mathcal{P}_n(q)} \right|_{C_1} < \frac{1}{R_1}$ , alors  $\left| \frac{\mathcal{P}_n(q)}{\mathcal{P}_{n+2}(q)} \right|_{C_1} < \frac{1}{R_1}$ .*

*Preuve du lemme.* Il découle de (4.33) et (4.34) que

$$\left| \frac{\mathcal{P}_{n+2}(q)}{\mathcal{P}_n(q)} \right|_{C_1} \geq \left| \binom{4}{2}_q \right|_{C_1} - R_1^4 \left| \frac{\mathcal{P}_{n-2}(q)}{\mathcal{P}_n(q)} \right|_{C_1} > (1-R_1^3)(1-R_1) - R_1^3 = R_1,$$

comme  $(1-R_1^3)(1-R_1) - R_1^3 - R_1 = R_1^4 - 2R_1^3 - 2R_1 + 1 = 0$  par le choix de  $R_1$ .  $\square$

Par récurrence, le lemme nous permet de conclure que  $\left| \frac{\mathcal{P}_{n-2}(q)}{\mathcal{P}_n(q)} \right|_{C_0} < \frac{1}{R_1}$  et donc

$$\left| \binom{4}{2}_q \right|_{C_1} > (1-R_1^3)(1-R_1) = R_1^3 + R_1 > R_1^4 \left| \frac{\mathcal{P}_{n-2}(q)}{\mathcal{P}_n(q)} \right|_{C_1}. \quad (4.35)$$

Supposons que  $\mathcal{P}_{n-2}(q)$  et  $\mathcal{P}_n(q)$  n'ont pas de zéros à l'intérieur de  $C_1$ . Puisque  $\binom{4}{2}_q = (q^2+1)(q^2+q+1)$  n'a pas de racine à l'intérieur de  $D_1$ , alors en raison de (4.35) nous pouvons appliquer le théorème de Rouché pour conclure que  $\mathcal{P}_{n+2}(q)$  n'a pas non plus de racines à l'intérieur de  $D_1$ . La récurrence complète la preuve de cette affirmation pour tous les  $\mathcal{P}_n(q)$ .

La preuve que les polynômes  $\tilde{\mathcal{P}}_n(q)$  ne possèdent pas de racines à l'intérieur de  $D_1$  est analogue puisque  $\tilde{\mathcal{P}}_n(q)$  satisfait également (3.30). Le théorème découle alors du fait que  $\mathcal{P}_n(q)$  et  $\tilde{\mathcal{P}}_n(q)$  sont des miroirs l'un de l'autre.  $\square$

Des expériences sur ordinateur montrent que pour  $n \leq 45$ , les racines des polynômes  $\mathcal{P}_n(q)$  et  $\tilde{\mathcal{P}}_n(q)$  appartiennent au petit anneau  $R_{\sqrt{2}} < |q_r| < R_{\sqrt{2}}^{-1}$ , voir Figure 1.

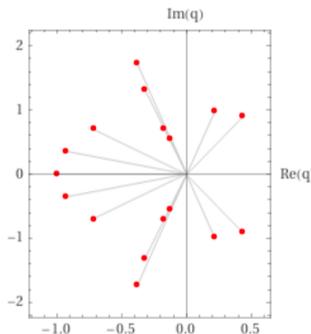


FIGURE 4.1 : Racines  $\mathcal{P}_{10}(q)$  : le plus petit module des racines est  $0.5668\dots$ , et le plus grand  $1.8832\dots$

### 4.8.3 Le $q$ -nombre de bronze

De nombreuses expériences sur ordinateur montrent que la situation dans le cas  $q$ -déformé est très différente de la théorie classique de Markov.

**Exemple 4.8.8.** Pour  $\sqrt{3}$ , on a :  $\sqrt{3} = [1, \overline{1}, 2] = [\overline{2}, \overline{4}]$ . La fonction génératrice de la série  $[\sqrt{3}]_q$  est

$$[\sqrt{3}]_q = \frac{q^3 + q^2 - q - 1 + \sqrt{q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 3q^2 + 2q + 1}}{2q^2},$$

voir [44]. La valeur absolue de la racine minimale du polynôme sous le radical est

$$R_{\sqrt{3}} := R(\sqrt{3}) \approx 0.527756 \dots$$

ce qui est compris entre  $R_\star$  et  $R_{\sqrt{2}}$  :

$$R_\star < R_{\sqrt{3}} < R_{\sqrt{2}}.$$

Cet exemple montre que, contrairement à la théorie classique de Markov, la série correspondant à  $\sqrt{2}$  "converge mieux" que celle de  $\sqrt{3}$ .

Donnons également un autre exemple intéressant, qui est le troisième nombre "mal approximé" dans la théorie de Markov, après  $\varphi$  et le nombre d'argent  $\sqrt{2}$ .

**Exemple 4.8.9.** Le nombre  $\alpha = \frac{9+\sqrt{221}}{10} = [2, 2, 1, 1]$ , parfois appelé "nombre de bronze", est le troisième nombre le plus irrationnel. Dans ce cas, le rayon de convergence peut être calculé explicitement. Plus précisément, le rayon de convergence de  $[\frac{9+\sqrt{221}}{10}]_q$  est de

$$R_{\text{bronze}} := R(\alpha) = \frac{1 + \sqrt{13} - \sqrt{2(\sqrt{13} - 1)}}{4} \approx 0.58069 \dots$$

En effet, un calcul direct donne

$$\left[\frac{9+\sqrt{221}}{10}\right]_q = \frac{q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 3q^3 + q^2 - 1 + \sqrt{(q^4 + 3q^3 + 5q^2 + 3q + 1)(q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 5q^3 + 3q^2 + 2q + 1)(q^2 - q + 1)}}{2q(q^3 + 2q^2 + q + 1)}$$

Notons que  $221 = 13 \cdot 17$ , les facteurs sous le radical sont des  $q$ -versions de ces nombres.

Nous nous demandons si pour d'autres irrationnels quadratiques le rayon de convergence est un nombre algébrique de degré une puissance de 2 (comme dans la théorie de la construction à la règle et au compas) comme pour  $\varphi$ ,  $\sqrt{2}$ , et pour l'exemple ci-dessus, mais nous n'avons pas de formules explicites en général.



## Chapitre 5

# Interprétations combinatoires en lien avec les $q$ -rationnels

Les  $q$ -rationnels ont été introduits et longuement étudiés dans le Chapitre . Nous avons introduit dans le Chapitre deux modèles combinatoires : le graphe de Farey (voir §) et la triangulation de polygones convexes (voir §). Nous allons dans ce chapitre commencer par présenter une  $q$ -déformation de ces deux graphes (en y rajoutant des pondérations), nous verrons alors qu'ils nous permettent de retrouver, de manière récursive, les  $q$ -rationnels étudiés dans le Chapitre . Nous connaissons la structure générale des  $q$ -rationnels (voir (3.7)). Les polynômes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  y apparaissant ont été étudiés et nous montrons que leurs coefficients ont des interprétations combinatoires dans le graphe de Farey (Théorème et Théorème ), ainsi que dans la triangulation des polygones (Proposition ). Nous avons également introduit la  $q$ -déformation des matrices des convergents dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  (voir §). Nous allons particulièrement nous intéresser dans ce chapitre aux traces de ces  $q$ -matrices. Nous montrons que ce sont des palindromes à coefficients positifs dans  $\mathbb{Z}[q]$  (Théorème ) et que leurs coefficients ont des interprétations combinatoires dans un nouveau modèle que nous introduisons : la triangulation des anneaux (Theorème ). Les études menées sur les interprétations combinatoires des polynômes  $\mathcal{R}, \mathcal{S}$  ainsi que les traces des  $q$ -matrices ont été publiées dans notre article [39].

### 5.1 Triangulations pondérées et fractions continues $q$ -déformées

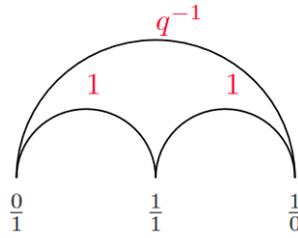
Le but de cette section est de donner une autre façon, récurrente, de définir les  $q$ -déformations des fractions continues. Dans [45] des modèles combinatoires pour calculer les  $q$ -fractions continues basés la triangulation d'un  $n$ -gone ainsi que le graphe de Farey ont été introduits. Nous allons dans un premier temps travailler avec le graphe de Farey. La principale différence avec les fractions continues sans  $q$ -déformation est que les arêtes de la triangulation correspondante sont pondérées. Les choix effectués concernant la pondération du graphe de Farey induira sur chaque triangulation finie qu'on extrait une répartition des poids sur les arêtes dans la triangulation des  $n$ -gones.

Pour se rappeler des liens entre les fractions continues et ces modèles combinatoires, voir la Section .

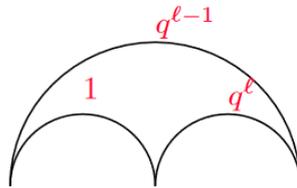
**Remarque 5.1.1.** Le point de vue combinatoire adopté dans cette section rend nécessaire de compléter l'ensemble des rationnels par le "plus grand élément"  $\infty = \frac{1}{0}$ . Sa  $q$ -déformation est  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q := \frac{1}{0}$ .

### 5.1.1 Graphe de Farey pondéré

**Définition 5.1.2.** ([45]) (a) Les côtés du triangle "initial"  $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$  sont pondérés comme suit :



(b) Les côtés de tous les autres triangles du graphe de Farey sont étiquetés selon la règle suivante :



Il est clair que les règles (a) et (b) déterminent de façon unique les poids de toutes les arêtes du graphe de Farey. En effet, chaque arête est adjacente à deux triangles dans le graphe de Farey, et deux arêtes quelconques sont reliées par une suite finie de triangles. Nous nous intéresserons essentiellement à l'intervalle  $[0, \infty)$  du graphe de Farey. Les sommets sont donc étiquetés selon la règle de la somme pondérée de Farey suivante :

$$\begin{array}{ccc} & q^{l-1} & \\ & \curvearrowright & \\ 1 & & q^l \\ & \curvearrowleft & \\ \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} & \frac{\mathcal{R}+q^l \mathcal{R}'}{\mathcal{S}+q^l \mathcal{S}'} & \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'} \end{array} \quad (5.1)$$

Ceci est une généralisation de la somme de Farey (2.3) dans le cas de la triangulation pondérée.

**Définition 5.1.3.** ([45]) Dans le triangle (5.1), nous appelons la fraction :

$$\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'} \oplus_q \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{S}''} := \frac{\mathcal{R}' + q^l \mathcal{R}''}{\mathcal{S}' + q^l \mathcal{S}''}, \quad (5.2)$$

la somme de Farey pondérée de  $\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'}$  et  $\frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{S}''}$ .

La partie supérieure du graphe de Farey pondéré est représentée sur la Figure présentée ci-dessous.

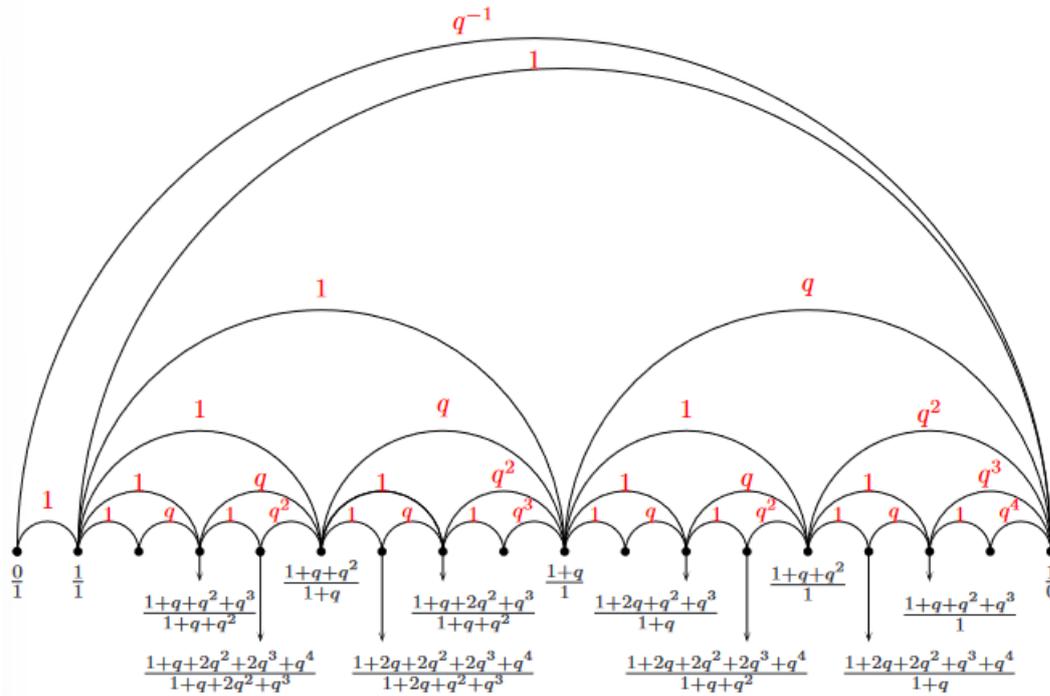


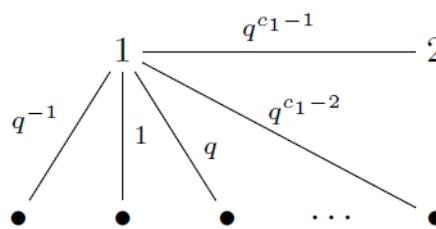
FIGURE 5.1 : Partie supérieure du graphe de Farey pondéré entre  $\frac{0}{1}$  et  $\frac{1}{0}$

### 5.1.2 Triangulations pondérées $\mathbb{T}_{r/s}^q$

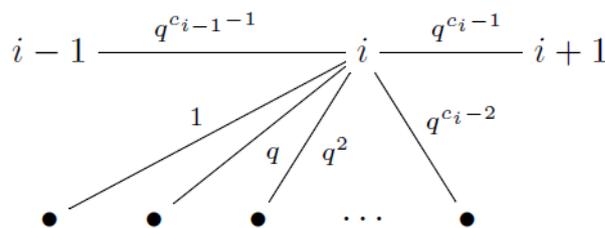
Étant donné un rationnel  $\frac{r}{s}$  et la triangulation correspondante  $\mathbb{T}_{r/s}$ , nous définissons la *triangulation pondérée*  $\mathbb{T}_{r/s}^q$ . Les sommets et les arêtes de  $\mathbb{T}_{r/s}^q$  sont affectés d'un poids qui est une puissance de  $q$ , tandis que les sommets sont étiquetés avec des  $q$ -rationnels.

**Définition 5.1.4.** ([45]) Les poids sont attribués aux arêtes selon les règles suivantes.

(a) Les arêtes au sommet portant le numéro 1 ont les poids suivants :

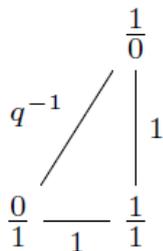


(b) Les arêtes d'un sommet supérieur dont le numéro  $i \geq 2$  ont les poids définis selon la règle suivante :



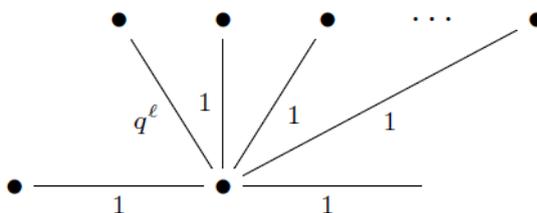
(c) Toutes les arêtes entre les sommets du bas ont un poids 1.

**Remarque 5.1.5.** (a) Les côtés du triangle "initial"  $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$  sont de poids 1, 1 et  $q^{-1}$ .



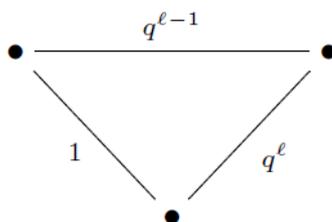
On notera que le côté de poids  $q^{-1}$  n'est pas utilisé dans le calcul des fractions continues.

(b) Il découle de la Définition que les arêtes d'un sommet inférieur ont les poids suivants :



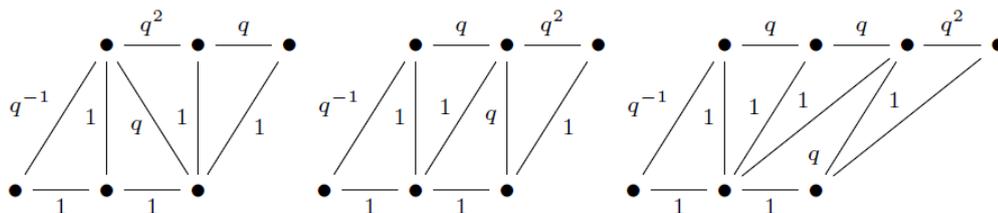
En particulier, au plus une arête d'un sommet inférieur a un poids différent de 1.

(c) Les côtés de chaque triangle ont les poids  $(1, q^{\ell}, q^{\ell-1})$  :



pour tout  $\ell \geq 1$ .

**Exemple 5.1.6.** Les triangulations pondérées  $\mathbb{T}_{5/2}^q, \mathbb{T}_{5/3}^q, \mathbb{T}_{7/5}^q$  (voir Exemple ) sont les suivantes



### 5.1.3 Étiquetage des sommets de $\mathbb{T}_{r/s}^q$

Nous devons également étiqueter les sommets de la triangulation pondérée  $\mathbb{T}_{r/s}^q$ .

**Définition 5.1.7.** ([45]) Désignons par le  $q$ -rationnel  $\left[\frac{r'}{s'}\right]_q$  le sommet de la triangulation  $\mathbb{T}_{r'/s'}^q$  qui correspond au rationnel  $\frac{r'}{s'}$  dans  $\mathbb{T}_{r/s}$ .

Les poids de  $\mathbb{T}_{r'/s'}^q$  encodent alors des relations algébriques entre les fractions attachées aux sommets. Plus précisément, nous avons l'énoncé suivant.

**Théorème 5.1.8** ([45]). *Tout triangle de  $\mathbb{T}_{r'/s'}^q$  est de la forme*

(5.3)

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'} & \xrightarrow{q^{\ell-1}} & \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{S}''} \\ & \searrow 1 & \swarrow q^\ell \\ & \frac{\mathcal{R}' + q^\ell \mathcal{R}''}{\mathcal{S}' + q^\ell \mathcal{S}''} & \end{array} .$$

Le Théorème affirme alors que tout nombre  $q$ -rationnel  $\left[\frac{r}{s}\right]_q$  peut être calculé récursivement à partir de la triangulation  $\mathbb{T}_{r/s}^q$ , en appliquant la règle de la somme pondérée de Farey.

**Exemple 5.1.9.** Les rationnels  $q$  dans  $\mathbb{T}_{5/2}^q, \mathbb{T}_{5/3}^q, \mathbb{T}_{7/5}^q$  peuvent être obtenus récursivement. Pour  $\left[\frac{5}{2}\right]_q$  et  $\left[\frac{5}{3}\right]_q$ , on obtient ce qui suit.

$$\begin{array}{ccc} & \frac{1}{0} & \frac{q^2}{1} & \frac{1+q+q^2}{1} & \frac{q}{1+q} & \frac{1+2q+q^2+q^3}{1+q} \\ & \swarrow q^{-1} & \downarrow 1 & \swarrow q & \downarrow 1 & \swarrow 1 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1+q}{1} & & \\ & \downarrow 1 & \downarrow 1 & \downarrow 1 & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \frac{1}{0} & \frac{q}{1} & \frac{1+q}{1} & \frac{q^2}{1+q+q^2} & \frac{1+q+2q^2+q^3}{1+q+q^2} \\ & \swarrow q^{-1} & \downarrow 1 & \swarrow q & \downarrow 1 & \swarrow 1 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1+q+q^2}{1+q} & & \\ & \downarrow 1 & \downarrow 1 & \downarrow 1 & & \end{array}$$

Le  $s$ -rationnel  $\left[\frac{7}{5}\right]_q$  correspond à

$$\begin{array}{ccc} & \frac{1}{0} & \frac{q}{1} & \frac{1+q}{1} & \frac{q}{1+q} & \frac{1+q+q^2}{1+q} & \frac{q^2}{1+q+2q^2+q^3} & \frac{1+q+2q^2+2q^3+q^4}{1+q+2q^2+q^3} \\ & \swarrow q^{-1} & \downarrow 1 & \swarrow 1 & \downarrow 1 & \swarrow q & \downarrow 1 & \swarrow 1 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1+q+q^2+q^3}{1+q+q^2} & & & \\ & \downarrow 1 & \downarrow 1 & \downarrow 1 & \downarrow 1 & & & \end{array}$$

## 5.2 Coefficients des polynômes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$

Nous rappelons que la Proposition nous donne la structure générale des  $q$ -rationnels :

$$\left[\frac{r}{s}\right]_q = \pm q^{-N} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}},$$

avec  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  premiers entre eux et le signe coïncide avec le signe de  $\frac{r}{s}$ .

Dans le cadre d'interprétations combinatoires, nous nous restreignons aux rationnels  $\frac{r}{s} \geq 1$ , donc nous savons plus précisément (toujours par la Proposition) que les rationnels étudiés dans ce chapitre sont de la forme :

$$\left[ \begin{matrix} r \\ - \\ s \end{matrix} \right]_q = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}},$$

avec  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  premiers entre eux.

Nous nous intéressons aux coefficients de ces polynômes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  et allons en donner des interprétations combinatoires. Pour cela, commençons par introduire du vocabulaire supplémentaire dans le modèle du graphe de Farey.

**Définition 5.2.1.** On note  $\text{wt}(\rho)$  le poids attribué à l'arête  $\rho$  dans la Section. On définit le poids du chemin  $\pi : \frac{r_0}{s_0} \xrightarrow{\rho_1} \frac{r_1}{s_1} \xrightarrow{\rho_2} \dots \xrightarrow{\rho_{n-1}} \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} \xrightarrow{\rho_n} \frac{r_n}{s_n}$  par le produit

$$\text{wt}(\pi) := \text{wt}(\rho_1)\text{wt}(\rho_2) \cdots \text{wt}(\rho_n). \quad (5.4)$$

**Définition 5.2.2.** Nous définissons le *chemin de droite* de  $\frac{r}{s}$  comme le chemin le plus court (en termes de nombre d'arêtes impliquées) de  $\frac{r}{s}$  à  $\frac{1}{0}$ , en commençant par le bord orienté vers la droite. Ce chemin utilise uniquement des arêtes orientées vers la droite qui ont pour poids une puissance positive de  $q$ .

De même, nous définissons le *chemin de gauche* de  $\frac{r}{s}$  comme le chemin le plus court de  $\frac{r}{s}$  à  $\frac{1}{0}$ , en commençant par l'arête orientée vers la gauche. Ce chemin n'utilise que des arêtes de poids 1 qui sont toutes orientées vers la gauche sauf la dernière joignant  $\frac{1}{1}$  à  $\frac{1}{0}$  qui est orientée vers la droite.

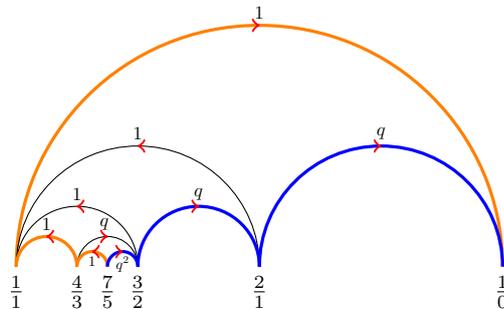
**Définition 5.2.3.** Nous définissons l'*aire* et la *co-aire* d'un chemin  $\pi$  commençant à  $\frac{r}{s}$  comme

$$\text{ar}(\pi) := \#\{\text{triangles compris entre } \pi \text{ et le chemin de droite de } \frac{r}{s}\} \quad (5.5)$$

$$\text{coar}(\pi) := \#\{\text{triangles compris entre } \pi \text{ et le chemin de gauche de } \frac{r}{s}\} \quad (5.6)$$

Regardons un exemple de base pour mieux visualiser le vocabulaire qui vient d'être introduit.

**Exemple 5.2.4.** Par exemple, dans le cas de  $\frac{7}{5}$ , le chemin de gauche est  $\frac{7}{5} \rightarrow \frac{4}{3} \rightarrow \frac{1}{1} \rightarrow \frac{1}{0}$  et le chemin de droite est  $\frac{7}{5} \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{2}{1} \rightarrow \frac{1}{0}$ . Ils sont dessinés respectivement en orange et en bleu sur l'image suivante.



Ici, nous ne considérerons que les chemins se terminant par  $\frac{1}{1}$  ou  $\frac{1}{0}$ . Dans la Figure et la Figure, nous donnons (dans cette même triangulation) des exemples de chemins avec leurs aires/co-aires correspondantes.

### 5.2.1 Interprétations énumératives des $q$ -rationnels dans le graphe de Farey

Nous sommes maintenant prêts à formuler deux interprétations énumératives des  $q$ -rationnels en termes de chemins dans le graphe de Farey. La première interprétation nécessite l'attribution des poids sur les arêtes du graphe de Farey.

**Théorème 5.2.5** ([39]). Soit  $\frac{r}{s}$  un rationnel supérieur à 1 et soit  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = \left[\frac{r}{s}\right]_q$  sa  $q$ -déformation. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{0}} \text{wt}(\pi), \\ \mathcal{S} &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{1}} \text{wt}(\pi).\end{aligned}$$

*Démonstration.* Prouvons ce théorème par récurrence. Supposons que la formule soit valable pour  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = \left[\frac{r}{s}\right]_q$  et  $\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'} = \left[\frac{r'}{s'}\right]_q$  où  $\frac{r}{s} < \frac{r'}{s'}$  sont deux rationnels liés par une arête dans le graphe de Farey. La même formule suivra pour  $\frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{S}''} = \left[\frac{r''}{s''}\right]_q$  où  $\frac{r''}{s''} = \frac{r+r'}{s+s'}$  est la médiane due à la règle locale (5.2). En effet, un chemin commençant à  $\frac{r''}{s''}$  utilisera soit le bord gauche du poids 1 puis un chemin commençant à  $\frac{r}{s}$ , soit il utilisera le bord droit du poids  $q^d$  puis un chemin commençant à  $\frac{r'}{s'}$ .

On calcule donc facilement

$$\begin{aligned}\sum_{\pi: \frac{r''}{s''} \rightarrow \frac{1}{0}} \text{wt}(\pi) &= \sum_{\pi: \frac{r''}{s''} \rightarrow \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{0}} \text{wt}(\pi) + \sum_{\pi: \frac{r''}{s''} \rightarrow \frac{r'}{s'} \rightarrow \frac{1}{0}} \text{wt}(\pi) \\ &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{0}} \text{wt}(\pi) + \sum_{\pi: \frac{r'}{s'} \rightarrow \frac{1}{0}} q^d \text{wt}(\pi) \\ &= \mathcal{R} + q^d \mathcal{R}' \\ &= \mathcal{R}''.\end{aligned}$$

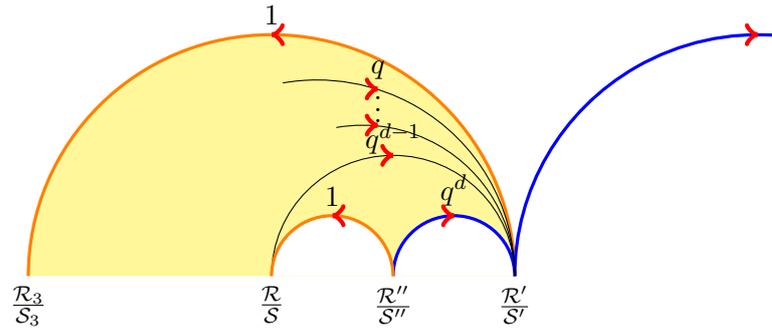
Et de même pour  $\mathcal{S}$ . □

La deuxième interprétation donne les numérateurs et dénominateurs des  $q$ -rationnels comme des fonctions génératrices pour la co-aire des chemins.

**Théorème 5.2.6** ([39]). Soit  $\frac{r}{s}$  un rationnel supérieur à 1 et soit  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = \left[\frac{r}{s}\right]_q$  sa  $q$ -déformation. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{0}} q^{\text{coar}(\pi)}, \\ \mathcal{S} &= \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{1}} q^{\text{coar}(\pi)}.\end{aligned}$$

*Démonstration.* Ce deuxième théorème se prouve de la même manière que le précédent : par récurrence en comptant les triangles enfermés par rapport aux chemins de gauche. On remarque qu'un chemin commençant à  $\frac{r''}{s''}$  et utilisant le bord gauche de poids 1 ne renfermera pas plus de triangles que le reste du chemin commençant à  $\frac{r}{s}$ . Alors qu'un chemin commençant à  $\frac{r''}{s''}$  et utilisant le bord droit du poids  $q^d$  contiendra toujours  $d$  de triangles supplémentaires supplémentaires que le reste du chemin commençant à  $\frac{r'}{s'}$ , situé sous le chemin gauche de  $\frac{r'}{s'}$  et le bord droit du poids  $q^d$ , comme le montre l'image suivante.



□

Notez que pour  $q = 1$  les théorèmes conduisent au corollaire immédiat suivant.

**Corollaire 5.2.7.** Soit  $\frac{r}{s}$  un rationnel supérieur à 1. Dans le graphe de Farey orienté,  $r$  est le nombre total de chemins de  $\frac{r}{s}$  à  $\frac{1}{0}$  et  $s$  est le nombre total de chemins de  $\frac{r}{s}$  à  $\frac{1}{1}$ .

Regardons de nouveau l'exemple de la triangulation de  $\frac{7}{5}$ .

**Exemple 5.2.8.** Nous avons

$$\left[ \frac{7}{5} \right]_q = \frac{1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4}{1 + q + 2q^2 + q^3}.$$

Tous les chemins de  $\frac{7}{5}$  à  $\frac{1}{1}$  ou à  $\frac{1}{0}$  sont représentés dans la Figure ci-dessous. On peut vérifier que la puissance de  $q$  d'un chemin coïncide avec celle de la co-aire du chemin et elles fournissent les polynômes dans le rapport de  $\left[ \frac{7}{5} \right]_q$ . Notons également que tout chemin se terminant par  $\frac{1}{1}$  peut être étendu à  $\frac{1}{0}$  simplement en incluant le bord du haut, et cela ne change pas la zone de la co-aire.

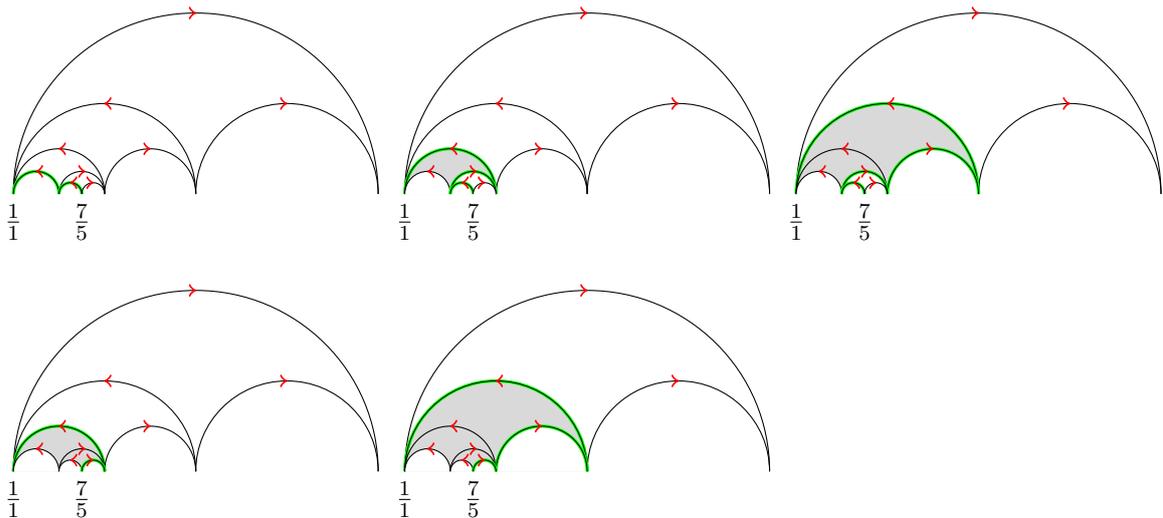


FIGURE 5.2 : Les 5 chemins (en vert) de  $\frac{7}{5}$  à  $\frac{1}{1}$ . Les triangles ombrés en gris comptent pour la co-aire du chemin tandis que les triangles laissés vides comptent pour l'aire. Le polynôme générateur de la co-aire  $1 + q + 2q^2 + q^3$  correspond au dénominateur de  $\left[ \frac{7}{5} \right]_q$ .

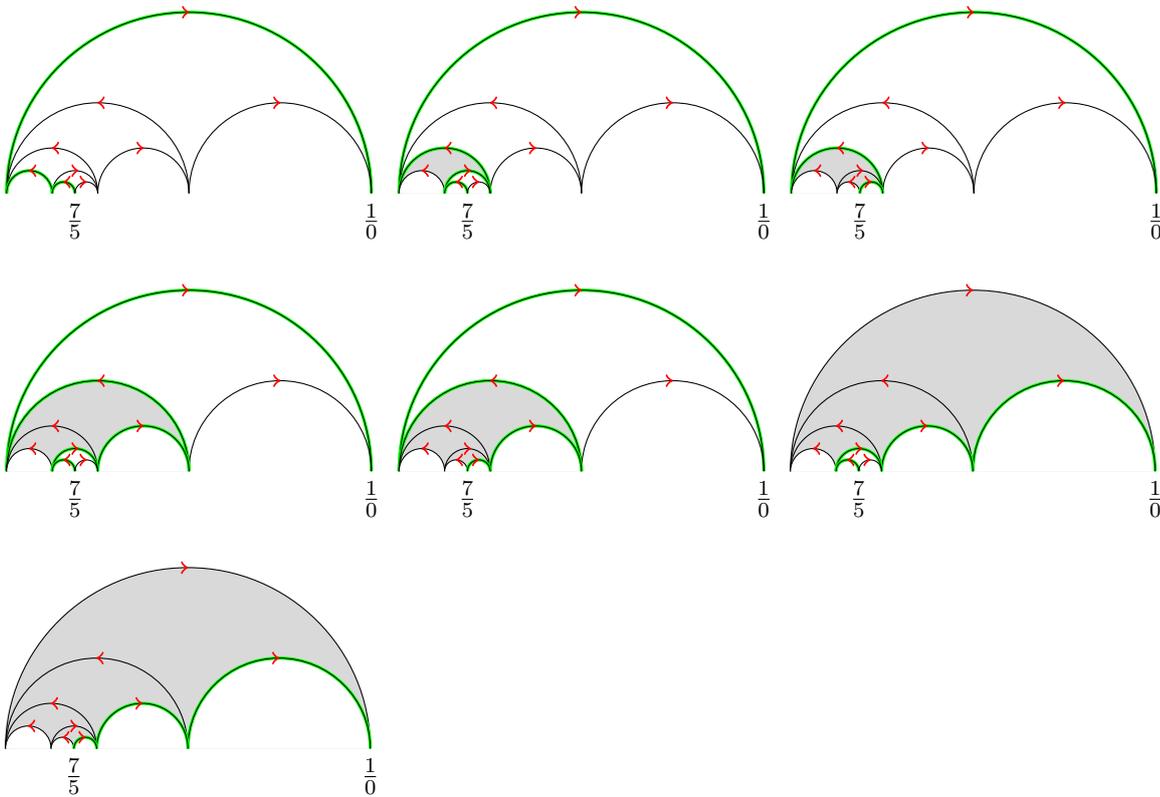


FIGURE 5.3 : Les 7 chemins (en vert) de  $\frac{7}{5}$  à  $\frac{1}{0}$ . Les triangles ombrés en gris compte pour la co-aire du chemin tandis que les triangles laissés vides comptent pour l'aire. Le polynôme générateur de co-aire  $1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4$  correspond au numérateur de  $\left[\frac{7}{5}\right]_q$ .

### 5.3 Interprétations énumératives des $q$ -continuants dans les polygones triangulés

Nous savons depuis le Chapitre que le numérateur et le dénominateur d'un  $q$ -rationnel peut se réécrire à l'aide des  $q$ -continuants (Proposition ). Nous reformulons donc ici le résultat du Théorème en termes de  $q$ -continuants. Nous utilisons le modèle des polygones triangulés au lieu du graphe de Farey.

A partir d'une suite  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  d'entiers positifs, ou d'une suite  $(c_1, \dots, c_k)$  d'entiers supérieurs à 1, notons  $\mathbb{T}$  le  $n$ -gone triangulé (2.5). Nous considérons les chemins qui suivent les arêtes orientées de  $\mathbb{T}$ . Si  $\pi$  est un chemin du sommet  $k_1$  au sommet  $k_2$  nous écrivons  $\pi : k_1 \rightarrow k_2$ .

Dans la triangulation  $\mathbb{T}$ , on définit le *chemin du haut*

$$\tau : k + 1 \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

et le *chemin du bas*

$$\beta : k + 1 \rightarrow k + 3 \rightarrow \dots \rightarrow n - 1 \rightarrow 1.$$

Les *aires* et *co-aires* d'un chemin  $\pi$  dans  $\mathbb{T}$  sont définis comme

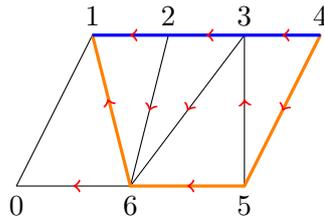
$$\text{ar}(\pi) := \#\{\text{triangles bloqués entre } \pi \text{ et le chemin du haut } \tau\} \quad (5.7)$$

$$\text{coar}(\pi) := \#\{\text{triangles bloqués entre } \pi \text{ et le chemin du bas } \beta\} \quad (5.8)$$

Notez que le triangle le plus à droite  $t_0 - \{0, 1, n - 1\}$  n'est jamais pris en compte dans le décompte de l'aire et de la co-aire. L'aire, resp. la co-aire, correspond au nombre de triangles à trois arêtes orientées au dessus du chemin, resp. sous le chemin.

Regardons de nouveau l'exemple de la triangulation de  $\frac{7}{5}$  pour mieux visualiser le vocabulaire introduit.

**Exemple 5.3.1.** A partir de la suite  $(a_1, \dots, a_{2m}) = (1, 2, 1, 1)$  ou de  $(c_1, \dots, c_k) = (2, 2, 3)$  on obtient le suivant l'heptagone triangulé. Le chemin du haut est coloré en bleu et le chemin du bas en orange.



Des exemples de chemins et de co-aires de chemins sont donnés dans les figures ci-après.

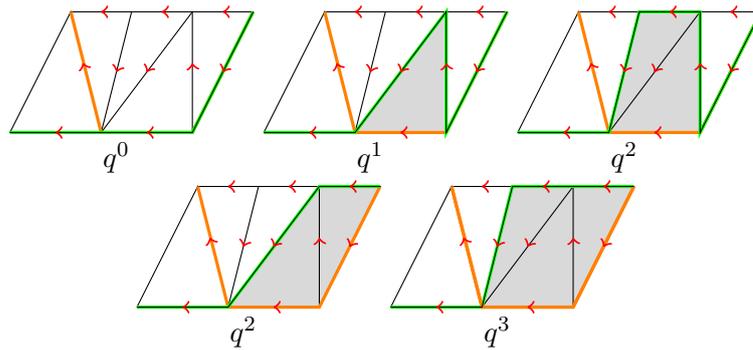


FIGURE 5.4 : Les 5 chemins commençant au sommet 4 et se terminant au sommet 0. Les triangles grisés correspondent aux triangles contribuant à la co-aire du chemin. Le polynôme générateur de la co-aire  $1 + q + 2q^2 + q^3$  correspond au dénominateur de  $\left[\frac{7}{5}\right]_q$ .

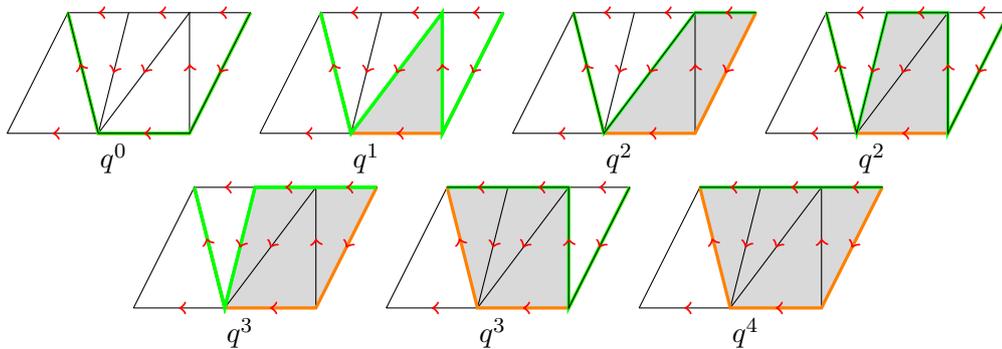


FIGURE 5.5 : Les 7 chemins commençant au sommet 4 et se terminant au sommet 1. Les triangles grisés correspondent aux triangles contribuant à la co-aire du chemin. Le polynôme générateur de la co-aire  $1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4$  correspond au numérateur de  $\left[\frac{7}{5}\right]_q$ .

Notez que tous les exemples présentés ci-dessus dans le modèle de triangulation des polygones correspondent à l'Exemple et à la Figure ainsi que la Figure dans le modèle du graphe de Farey.

**Proposition 5.3.2.** *Avec la notation ci-dessus, on a*

$$K_{2m}(a_1, \dots, a_{2m})_q = E_k(c_1, \dots, c_k)_q = \sum_{\pi: k+1 \rightarrow 1} q^{\text{coar}(\pi)},$$

$$K_{2m-1}(a_2, \dots, a_{2m})_q = E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q = \sum_{\pi: k+1 \rightarrow 0} q^{\text{coar}(\pi)},$$

où les sommes parcourent tous les chemins  $\pi$  dans  $\mathbb{T}$  commençant au sommet  $k+1$  et se terminant respectivement au sommet 1 ou au sommet 0.

*Démonstration.* Considérons le nombre rationnel correspondant défini par

$$\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2m}] = \llbracket c_1, c_2, \dots, c_k \rrbracket.$$

Comme expliqué dans le § la triangulation de Farey  $\mathbb{T}_{\frac{r}{s}}$  contient la suite  $(a_1, \dots, a_{2m})$  dans la répartition des triangles selon la position des bases à gauche ou à droite de la ligne verticale tracée à partir de  $\frac{r}{s}$ . La triangulation  $\mathbb{T}$  avec les paramètres  $(a_1, \dots, a_{2m})$  est un version de  $\mathbb{T}_{\frac{r}{s}}$  utilisant des triangles euclidiens. La ligne verticale dans  $\mathbb{T}$  peut être pensée comme la diagonale joignant les sommets 0 et  $k+1$  et la position à gauche ou à droite de la base d'un triangle de Farey devient la position en dessous ou au dessus de cette diagonale. Puis

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = \left[ \frac{r}{s} \right]_q = \frac{K_n(a_1, \dots, a_n)_q}{K_{n-1}(a_2, \dots, a_n)_q} = \frac{E_k(c_1, \dots, c_k)_q}{E_{k-1}(c_2, \dots, c_k)_q}$$

la proposition est une simple reformulation du Théorème . □

**Remarque 5.3.3.** Lorsque  $q = 1$  la proposition indique que le numérateur  $r = K_{2m}(a_1, \dots, a_{2m})$  est le nombre total de chemins du sommet  $k+1$  au sommet 1.

Et que le dénominateur  $s = K_{2m-1}(a_2, \dots, a_{2m})$  est le nombre total de chemins du sommet  $k+1$  au sommet 0.

Ce résultat peut être trouvé dans [23, Prop. 5.21] dans le langage des lotus. C'est également équivalent aux résultats de [58] et [9] en termes de chemins ou de correspondances dans les graphes serpent.

**Remarque 5.3.4.** La triangulation de Farey  $\mathbb{T}_{\frac{r}{s}}$  contient les deux rationnels définis par  $\frac{\widetilde{r}}{s} := [a_1, \dots, a_{2m-1}]$  et  $\frac{\overline{r}}{s} := \llbracket c_1, c_2, \dots, c_{k-1} \rrbracket$ . Ces convergents de  $\frac{r}{s}$  apparaissent dans la deuxième colonne des matrices de la Proposition . Dans la triangulation des polygones  $\mathbb{T}$ , ces convergents correspondent respectivement au sommet  $k+2$  et au sommet  $k$ . Les triangulations des polygones correspondant aux convergents sont incluses dans  $\mathbb{T}$ . Ils sont obtenus en supprimant tous les triangles sauf un incident au sommet  $k$  ou  $k+2$ . En changeant donc le sommet initial dans les chemins, nous obtenons une formule similaire pour les convergents :

$$\widetilde{K}_{2m-1}(a_1, \dots, a_{2m-1})_q = \sum_{\pi: k+2 \rightarrow 1} q^{\text{coar}(\pi)}, \quad \widetilde{K}_{2m-2}(a_2, \dots, a_{2m-1})_q = \sum_{\pi: k+2 \rightarrow 0} q^{\text{coar}(\pi)},$$

$$E_{k-1}(c_1, \dots, c_{k-1})_q = \sum_{\pi: k \rightarrow 1} q^{\text{coar}(\pi)}, \quad E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q = \sum_{\pi: k \rightarrow 0} q^{\text{coar}(\pi)},$$

où les sommes parcourent les chemins  $\pi$  dans  $\mathbb{T}$  et où la notation  $\widetilde{K}_{2m-1}(a_1, \dots, a_{2m-1})_q$  désigne le polynôme miroir de  $K_{2m-1}(a_1, \dots, a_{2m-1})_q$ .

## 5.4 Interprétations combinatoires des coefficients des traces des $q$ -matrices

### 5.4.1 $q$ -rotondes et triangulations d'anneaux

Dans cette section, nous définissons les rotondes quantiques et donnons des interprétations en utilisant la triangulation des anneaux. Les rotondes quantiques sont les  $q$ -analogues de (2.22) définis par

$$\begin{aligned} R^+(a_1, \dots, a_n)_q &:= qK_n(a_1, \dots, a_n)_q + \widetilde{K}_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1})_q = \text{Tr } M_q^+(a_1, \dots, a_n) \\ R(c_1, \dots, c_k)_q &:= E_k(c_1, \dots, c_k)_q - q^{c_k-1} E_{k-2}(c_2, \dots, c_{k-1})_q = \text{Tr } M_q(c_1, \dots, c_k), \end{aligned} \quad (5.9)$$

où  $n$  est pair et  $a_i$  et  $c_i$  sont des entiers positifs. Les  $q$ -rotondes sont des polynômes en  $q$ . Les traces des matrices  $q$ -déformées dans  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  ont été étudiées dans la Section § et en particulier on a la propriété suivante.

**Corollaire 5.4.1** ([39]). *Les  $q$ -rotondes sont des polynômes palindromes en  $q$  à coefficients entiers positifs.*

**Exemple 5.4.2.** Les rotondes associés aux développements de fractions continues de  $\frac{7}{5}$  sont

$$\begin{aligned} R^+(1, 2, 1, 1)_q &:= \text{Tr} \begin{pmatrix} q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 & 1 + q + q^2 + q^3 \\ q + q^2 + 2q^3 + q^4 & 1 + q + q^2 \end{pmatrix} \\ &= 1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 \\ R(2, 2, 3)_q &:= \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4 & -(q^2 + q^3 + q^4) \\ 1 + q + 2q^2 + q^3 & -(q^2 + q^3) \end{pmatrix} \\ &= 1 + q + q^2 + q^3 + q^4. \end{aligned}$$

### 5.4.2 Triangulations des anneaux

Dans cette partie, nous utilisons la terminologie de [21], et en particulier de [3]. Un anneau est une région délimitée par deux cercles concentriques. On note  $C_{\ell, k}$  un anneau avec  $\ell$  points positionnés sur le cercle extérieur et  $k$  points positionnés sur le cercle intérieur. Les points positionnés peuvent être connectés grâce à des arcs (orientés). Il y a des *arcs de frontière* qui connectent deux points consécutifs le long des cercles intérieurs ou extérieurs. Il y a des *arcs de pont* qui connectent deux points, l'un étant sur le cercle extérieur à l'autre étant sur le cercle intérieur. Il y a aussi les *arcs périphériques* qui connectent deux points sur le même cercle. Une triangulation d'un anneau est la collection maximale d'arcs (à homotopie près) qui ne s'intersectent pas à l'intérieur de l'anneau. Les arcs de frontière appartiennent toujours à une triangulation. Dans notre situation, les triangulations n'impliqueront pas les arcs périphériques et tous les arcs seront orientés. Un triangle est une région fermée dans l'anneau délimité par trois arcs connectés.

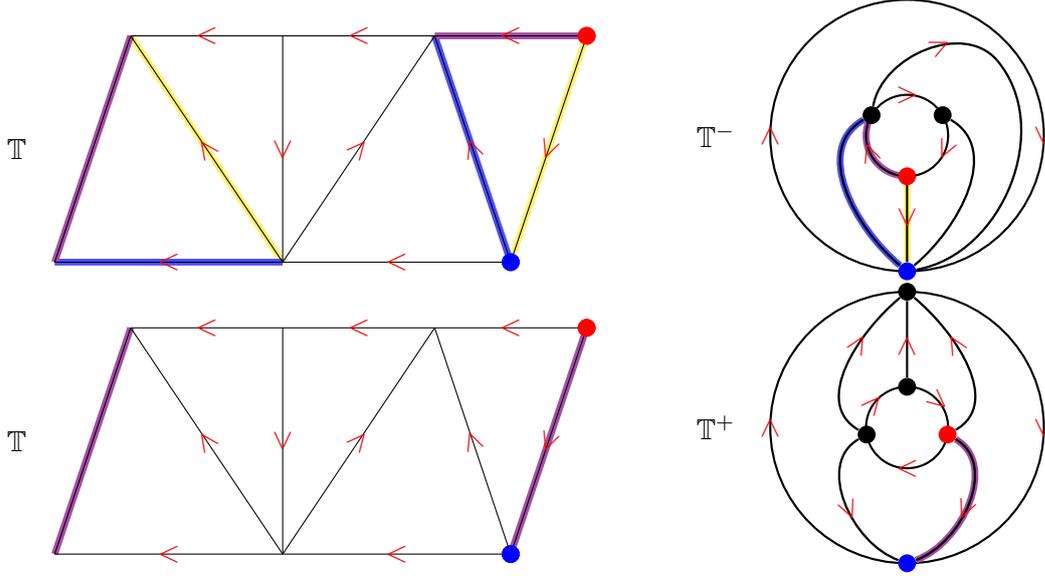
On définit les triangulations des anneaux associés aux suites  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  d'entiers positifs et  $(c_1, \dots, c_k)$  d'entiers supérieurs à 1.

- Soit  $\mathbb{T}^-(c_1, \dots, c_k)$  la triangulation orientée de  $C_{n-k-3, k}$  obtenue par la triangulation  $\mathbb{T}$  en collant le triangle  $\{0, 1, n-1\}$  avec le triangle  $\{k, k+1, k+2\}$ , ce dernier impose

l'orientation. Le cercle intérieur est composé des points numérotés de 1 à  $k$  dans le sens anti-horaire, et le cercle extérieur est composé des points numérotés de  $k+2$  à  $n-1$  dans le sens horaire.

- Soit  $\mathbb{T}^+(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  la triangulation orientée  $C_{n-k-2, k}$  obtenue par la triangulation  $\mathbb{T}$  en collant le côté joignant 1 et 0 avec le côté joignant  $k+1$  et  $k+2$ . Le cercle intérieur est composé des points numérotés  $1, \dots, k$  dans le sens anti-horaire, et le cercle extérieur est composé des points numérotés  $k+2, \dots, n$  dans le sens horaire.

**Exemple 5.4.3.** Pour la suite  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m}) = (1, 2, 1, 1)$  et  $(c_1, \dots, c_k) = (2, 2, 3)$  on obtient les triangulations des anneaux suivantes



**Remarque 5.4.4.** Dans  $\mathbb{T}^-(c_1, \dots, c_k)$  on récupère la suite  $(c_1, \dots, c_k)$  comme étant la quiddité liée aux points du cercle intérieur. Dans  $\mathbb{T}^+(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  on récupère la suite  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  par l'alternance de triangles consécutifs avec les bases sur les cercles extérieurs ou intérieurs. On a les relations  $\mathbb{T}^+(a_1, a_2, \dots, a_{2m}) = \mathbb{T}^-(c_1 + 1, \dots, c_k)$ .

Dans les triangulations, nous considérons des boucles fermées orientées sans auto-croisement. Ce sont des boucles obtenues par concaténation d'arcs connectés orientés donnés dans la triangulation. Pour une boucle fermée  $\gamma$  dans l'anneau triangulé nous définissons l'aire et la co-aire par

$$\text{ar}(\gamma) := \#\{\text{triangles compris entre } \gamma \text{ et le cercle intérieur}\} \quad (5.10)$$

$$\text{coar}(\gamma) := \#\{\text{triangles compris entre } \gamma \text{ et le cercle extérieur}\} \quad (5.11)$$

Nous sommes maintenant prêts à énoncer le résultat principal concernant les interprétations combinatoires des  $q$ -rotondes. La preuve est reportée à la Section

### 5.4.3 Interprétation des $q$ -traces

**Théorème 5.4.5** ([39]). Soit  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  une suite d'entiers positifs et soit  $(c_1, \dots, c_k)$  une suite d'entiers supérieurs à 1. On a

$$(i) \quad R_{2m}^+(a_1, \dots, a_{2m})_q = \sum_{\gamma \text{ dans } \mathbb{T}^+} q^{\text{ar}(\gamma)} = \sum_{\gamma \text{ dans } \mathbb{T}^+} q^{\text{coar}(\gamma)},$$

$$(ii) \quad R_k(c_1, \dots, c_k)_q = \sum_{\gamma \text{ dans } \mathbb{T}^-} q^{\text{ar}(\gamma)} = \sum_{\gamma \text{ dans } \mathbb{T}^-} q^{\text{coar}(\gamma)},$$

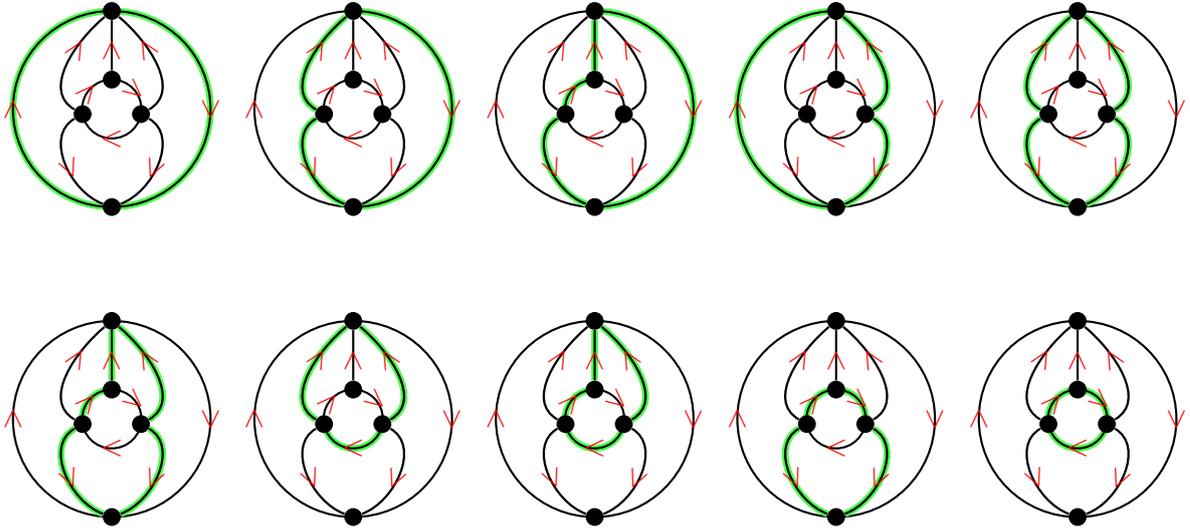
où la somme porte sur toutes les boucles fermées dans les triangulations  $\mathbb{T}^+ = \mathbb{T}^+(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  et  $\mathbb{T}^- = \mathbb{T}^-(c_1, \dots, c_k)$ , respectivement.

On note que les sommes impliquant l'aire et la co-aire coïncident à cause de la palindromicité mentionnée dans le Théorème .

Dans le cas  $q = 1$  on obtient immédiatement le corollaire suivant.

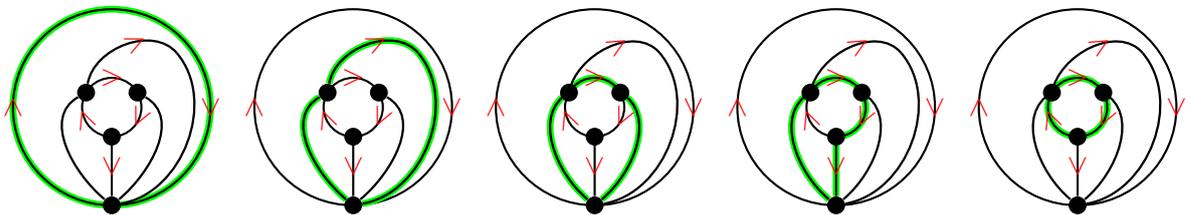
**Corollaire 5.4.6.** Soit  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  une suite d'entiers positif et soit  $(c_1, \dots, c_k)$  une suite d'entiers supérieurs à 1. La rotonde  $R_{2m}^+(a_1, \dots, a_{2m})$  est le nombre total de boucles fermées dans  $\mathbb{T}^+(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  et la rotonde  $R_k(c_1, \dots, c_k)$  est le nombre total de boucles fermées dans  $\mathbb{T}^-(c_1, \dots, c_k)$ .

**Exemple 5.4.7.** Reprenons l'exemple de  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m}) = (1, 2, 1, 1)$  et  $(c_1, \dots, c_k) = (2, 2, 3)$ , on obtient 10 boucles fermées dans  $\mathbb{T}^+$  :



La fonction génératrice pour l'aire (ou la co-aire) de ces boucles est  $1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5$ , ce qui coïncide avec la  $q$ -rotonde  $R_4^+(1, 2, 1, 1)_q$ .

On obtient 5 boucles fermées dans  $\mathbb{T}^-$  :



La fonction génératrice pour l'aire (ou la co-aire) de ces chemins est  $1 + q + q^2 + q^3 + q^4$ , ce qui coïncide avec la  $q$ -rotonde  $R_3(2, 2, 3)_q$ .

#### 5.4.4 Preuve du Théorème

D'après le Théorème , une formule avec l'aire d'une fonction est équivalente à la formule avec la co-aire d'une fonction. Nous allons ici utiliser la co-aire.

Commençons par prouver la partie (i) du théorème. Par définition et grâce à la Proposition

ainsi que la Remarque on a

$$\begin{aligned} R_{2m}^+(a_1, \dots, a_{2m})_q &= qK_{2m}(a_1, \dots, a_{2m})_q + \widetilde{K}_{2m-2}(a_2, \dots, a_{2m-1})_q \\ &= q \sum_{\pi: k+1 \rightarrow 1} q^{coar(\pi)} + \sum_{\pi: k+2 \rightarrow 0} q^{coar(\pi)}, \end{aligned}$$

où le chemin  $\pi$  se trouve dans la triangulation classique  $\mathbb{T}$  associé à la suite  $(a_1, \dots, a_{2m})$ .

Chaque boucle fermée  $\gamma$  dans  $\mathbb{T}^+$  donne lieu à un chemin  $\pi_\gamma$  dans la triangulation classique  $\mathbb{T}$ . La co-aire  $coar(\gamma)$  et la co-aire  $coar(\pi_\gamma)$  sont soit égales soit elles diffèrent d'un. Le triangle  $t_0$  qui a pour côtés  $\{0, 1, n-1\}$  n'est jamais capturé par un chemin  $\mathbb{T}$  mais il peut l'être ou pas par un chemin fermé dans  $\mathbb{T}^+$ . Il y a deux types de boucles fermées :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{boucles dans } \mathbb{T}^+\} = \{\text{chemins passant par le sommet } 1\} & \sqcup & \left\{ \begin{array}{l} \text{chemins passant par le sommet } k+2 \\ \text{et ne passant pas par le sommet } 1 \end{array} \right\} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \{\text{chemins } k+1 \rightarrow 1 \text{ dans } \mathbb{T}\} & & \{\text{chemins } k+2 \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{T}\} \end{array}$$

Si  $\gamma$  passe par le sommet 1, alors le chemin correspondant  $\pi_\gamma$  dans  $\mathbb{T}$  part du sommet  $k+1$  et termine au sommet 1. Le chemin  $\gamma$  ainsi que le chemin  $\pi_\gamma$  n'utilisent pas les arcs de frontières ou le côté qui connecte les sommets  $n-1$  et 0. Tous les triangles contribuant dans  $coar(\pi_\gamma)$  vont compter dans  $coar(\gamma)$  mais en plus, le triangle  $t_0$  va aussi compter dans  $coar(\gamma)$ . Ainsi, on a

$$q^{coar(\gamma)} = q^{coar(\pi_\gamma)+1},$$

pour toute boucle  $\gamma$  passant par le sommet 1.

Si  $\gamma$  ne passe pas par le sommet 1 il passe nécessairement par le sommet  $k+2$ . Le chemin correspondant  $\pi_\gamma$  dans  $\mathbb{T}$  part du sommet  $k+2$  jusqu'au sommet 0. Le triangle  $t_0$  sera entouré par la boucle  $\gamma$  et ne comptera pas dans  $coar(\gamma)$ . Ainsi, on a

$$q^{coar(\gamma)} = q^{coar(\pi_\gamma)},$$

pour toute boucle  $\gamma$  ne passant pas par le sommet 1.

Finalement, on en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \text{ dans } \mathbb{T}^+} q^{coar(\gamma)} &= \sum_{\gamma \text{ passant par } 1} q^{coar(\gamma)} + \sum_{\gamma \text{ ne passant pas par } 1} q^{coar(\gamma)} \\ &= q \sum_{\pi: k+1 \rightarrow 1} q^{coar(\pi)} + \sum_{\pi: k+2 \rightarrow 0} q^{coar(\pi)} \\ &= R_{2m}^+(a_1, \dots, a_{2m})_q \end{aligned}$$

La partie (i) est prouvée.

Pour prouver la partie (ii) nous utilisons les relations de matrices de la Proposition

$$M_{2m}^+(a_1, \dots, a_{2m})_q = M_k(c_1, \dots, c_k)_q R_q,$$

où  $R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . En prenant la trace on obtient

$$\text{Tr } M_{2m}^+(a_1, \dots, a_{2m})_q = \text{Tr } R_q M_k(c_1, \dots, c_k)_q = \text{Tr } M_k(c_1 + 1, \dots, c_k)_q,$$

et le résultat découle de  $\mathbb{T}^+(a_1, a_2, \dots, a_{2m}) = \mathbb{T}^-(c_1 + 1, \dots, c_k)$ , voir la Remarque. Le Théorème est ainsi prouvé.



# Chapitre 6

## $(q, t)$ -rationnels

Dans ce chapitre nous introduisons un deuxième paramètre formel que nous appelons " $t$ " (qui est totalement indépendant du paramètre  $q$ ). Nous parlons alors ici des  $(q, t)$ -rationnels. Nous avons étudié la structure générale des  $q$ -rationnels : sont des quotients de polynômes en  $q$  (Chapitre ). Un  $(q, t)$ -rationnel sera également un quotient de polynômes, mais cette fois-ci, en deux variables formelles  $q$  et  $t$ . Nous continuerons de nommer  $\mathcal{S}$  (respectivement  $\mathcal{R}$ ) le numérateur (respectivement le dénominateur) des  $(q, t)$ -rationnels obtenus. Le Chapitre présente différentes interprétations combinatoires des  $q$ -rationnels dans plusieurs modèles (graphe de Farey, triangulation des polygones, triangulation des anneaux). L'objectif principal de ce chapitre est donc d'étudier à nouveau les interprétations combinatoires que l'on peut observer dans ces modèles, en les pondérant cette fois-ci avec les deux paramètres  $q, t$  et d'observer si l'introduction de ce deuxième paramètre nous permet d'obtenir des informations combinatoires supplémentaires. On énonce dans un premier temps les propriétés combinatoires des coefficients des polynômes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  observées dans le graphe de Farey (Théorème et Théorème ). Nous poursuivons en introduisant un nouveau modèle combinatoire : les graphes en serpent. Dans ce modèle nous énonçons le Théorème comme interprétation combinatoire. Enfin, nous terminerons ce chapitre en étudiant comme dans la Section , les interprétations combinatoires des traces des  $(q, t)$ -matrices dans le modèle de la triangulation des anneaux (Théorème ).

### 6.1 Interprétations combinatoires dans le graphe de Farey

#### 6.1.1 Définition et construction du graphe de Farey en $(q, t)$

Commençons par donner un  $(q, t)$ -analogue de la définition matricielle qui a été donnée pour les  $q$ -rationnels dans la Proposition .

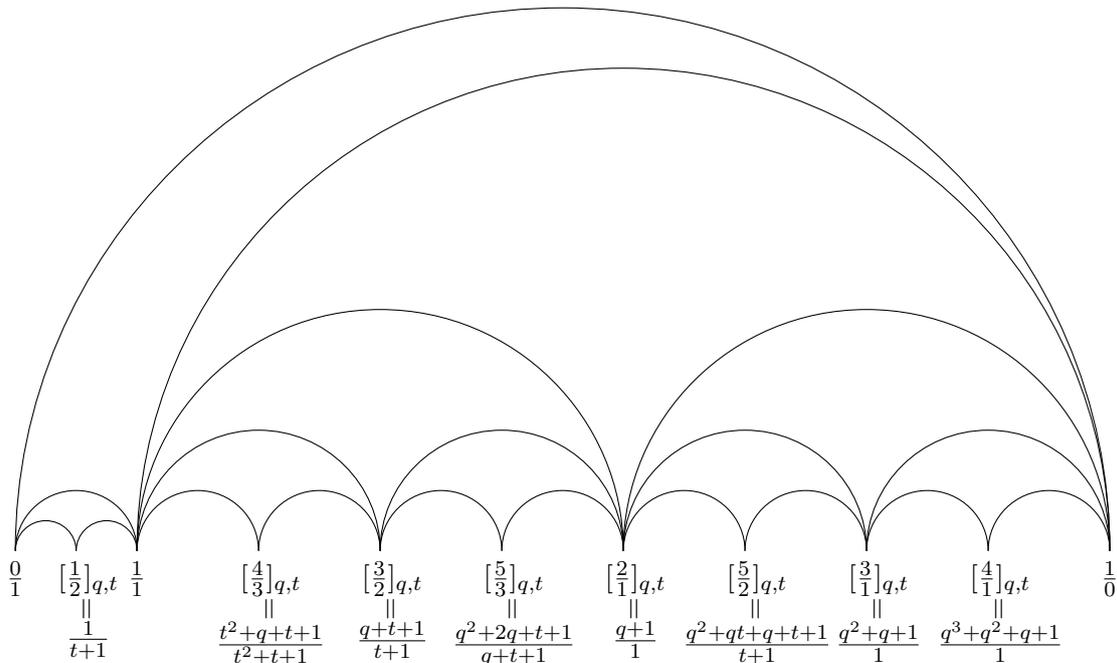
**Définition 6.1.1.** Pour tout  $a_i, c_i \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\begin{aligned} M_{q,t}(a_1, \dots, a_{2m}) &:= \begin{pmatrix} [a_1]_q & q^{a_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_2]_t & t^{a_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} [a_{2m-1}]_q & q^{a_{2m-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_{2m}]_t & t^{a_{2m}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R} & t^{a_{2m}} \mathcal{R}' \\ \mathcal{S} & t^{a_{2m}} \mathcal{S}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = [a_1, \dots, a_{2m}]_{q,t}$  et  $\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'} = [a_1, \dots, a_{2m-1}]_{q,t}$ .

Calculons quelques exemples de  $(q, t)$ -rationnels en les mettant dans le graphe de Farey pour préparer le terrain des interprétations combinatoires qui se trouveront dans la suite de ce chapitre.

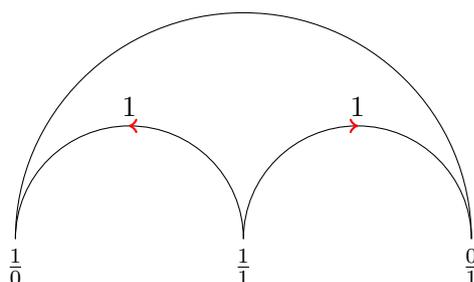
**Exemple 6.1.2.** On observe ici une partie du graphe de Farey en  $(q, t)$ .

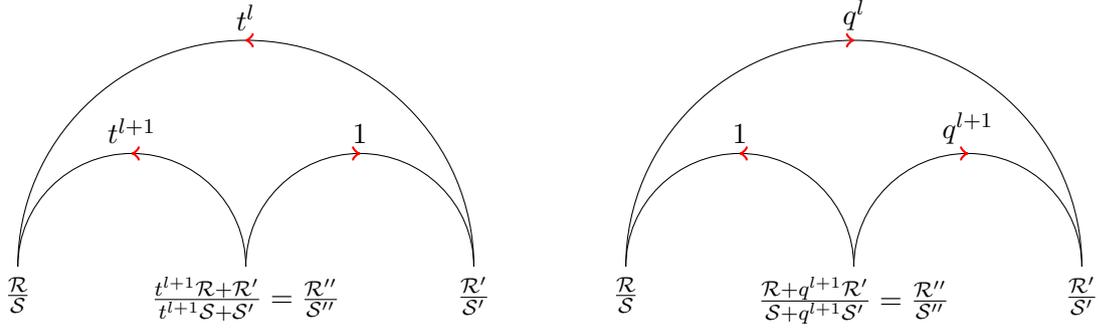


Dans l'objectif d'énoncer des propriétés combinatoires, nous allons maintenant orienter et munir d'une pondération (en  $q$  et  $t$ ) ce graphe de Farey tout comme nous l'avions fait dans le cas des  $q$ -rationnels dans le §.

**Définition 6.1.3.** Pour construire le graphe de Farey en  $(q, t)$  on place sur chaque arête un poids, qui correspond à une puissance de  $q$  ou de  $t$  et on définit la même orientation que dans le cas classique.

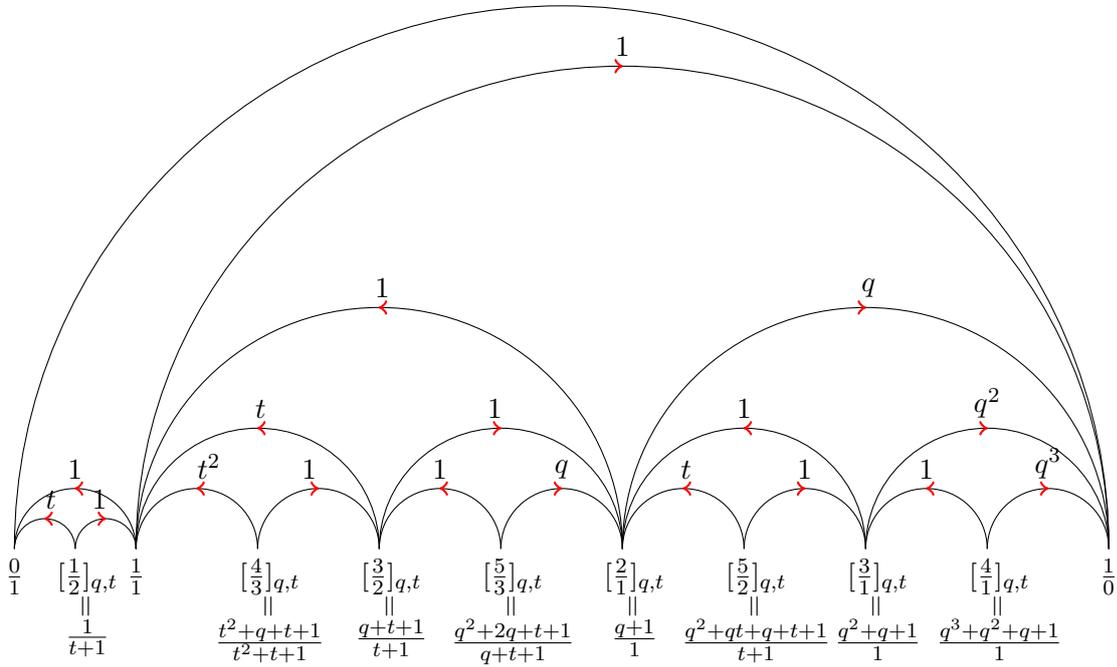
Pour tout réel positif on construit le graphe pondéré à l'aide des trois triangles suivants :





Observons donc une partie du graphe de Farey pondéré en  $(q, t)$ .

**Exemple 6.1.4.** On reprend l'Exemple que l'on munit de la pondération présentée ci-dessus.



**Proposition 6.1.5.** Pour tout rationnel  $\frac{r}{s}$  tel que  $[\frac{r}{s}]_{q,t} = \frac{\mathcal{R}(q,t)}{\mathcal{S}(q,t)}$  alors  $[\frac{s}{r}]_{q,t} = \frac{\mathcal{S}(t,q)}{\mathcal{R}(t,q)}$ .

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le développement en fraction continue  $[a_1, \dots, a_{2m}]_{q,t}$  lié à la matrice de la Définition en remarquant que :

- Si  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2m-1}, 1]$  alors  $\frac{s}{r} = [0, a_1, \dots, a_{2m-2}, a_{2m-1} + 1]$
- Si  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2m}]$  avec  $a_{2m} \geq 2$ , alors  $\frac{s}{r} = [0, a_1, \dots, a_{2m-1}, a_{2m} - 1, 1]$

□

### 6.1.2 Interprétations combinatoires

Nous utiliserons de nouveau dans ce chapitre la notion de chemin (introduite dans le §) et nous conserverons la notation  $\pi$  pour désigner un chemin dans le graphe de Farey en  $(q, t)$ .

La première interprétation nécessite l'attribution des poids sur les arêtes du graphe de Farey.

**Théorème 6.1.6.** Soit  $\frac{r}{s}$  un rationnel supérieur à 1 et soit  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = [\frac{r}{s}]_{q,t}$  sa  $(q, t)$ -déformation. On a

$$\mathcal{R} = \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{0}} \text{wt}(\pi),$$

$$\mathcal{S} = \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{1}} \text{wt}(\pi).$$

où  $\text{wt}(\pi)$  désigne le poids du chemin  $\pi$  (voir la Définition).

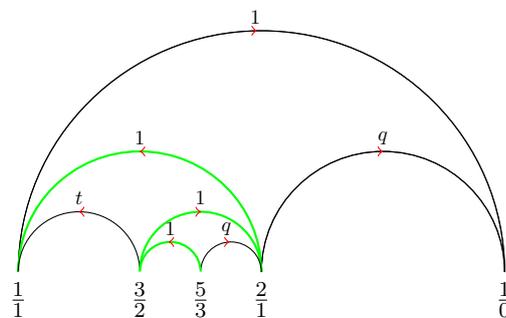
*Démonstration.* La preuve de ce théorème est identique à celle du Théorème (en prenant en compte que soit nous sommes dans un triangle avec des poids étant des puissances de  $t$ , soit des puissances de  $q$ ).  $\square$

Pour deuxième interprétation nous avons besoin d'introduire du nouveau vocabulaire ainsi que les notations qui s'en suivent.

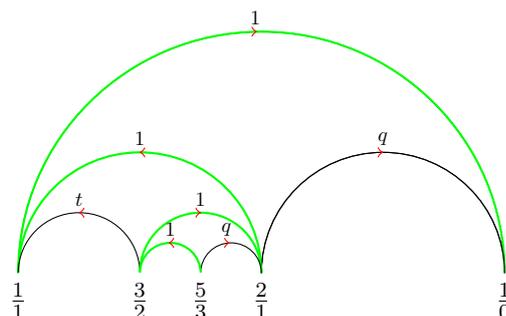
**Définition 6.1.7.** On appelle *petite diagonale* le chemin composé des arêtes de poids 1 qui s'arrête en  $\frac{1}{1}$  et *diagonale* le chemin composé de toutes les arêtes de poids 1 (donc qui s'arrête en  $\frac{1}{0}$ ).

**Remarque 6.1.8.** La petite diagonale est aussi le chemin allant vers  $\frac{1}{1}$  empruntant le plus d'arêtes dans la triangulation d'un rationnel. De même, la diagonale est le chemin allant vers  $\frac{1}{0}$  empruntant le plus d'arêtes dans la triangulation d'un rationnel.

**Exemple 6.1.9.** Dans la figure ci-dessous, on exprime en vert la petite diagonale dans la triangulation de  $\frac{5}{3}$ .



Dans la figure ci-dessous, on exprime en vert la diagonale dans la triangulation de  $\frac{5}{3}$ .



**Définition 6.1.10.** On dit qu'un triangle est *capturé* entre la petite diagonale (ou la diagonale) par la gauche, si le triangle se trouve enfermé entre le chemin se trouvant à gauche du sommet du milieu du triangle considéré et la petite diagonale (ou diagonale). De la même manière, on dit qu'un triangle est *capturé* entre la petite diagonale (ou la diagonale) par la droite, si le triangle se trouve enfermé entre le chemin se trouvant à droite du sommet du milieu du triangle considéré et la petite diagonale (ou diagonale).

**Définition 6.1.11.** Pour  $\pi$  un chemin allant de  $\frac{r}{s}$  à  $\frac{1}{1}$ , on note  $pg(\pi)$  le nombre de triangles capturés entre la petite diagonale et le chemin  $\pi$  par la gauche et  $pd(\pi)$  le nombre de triangles capturés entre la petite diagonale et le chemin  $\pi$  par la droite. De même, pour  $\pi$  un chemin allant de  $\frac{r}{s}$  à  $\frac{1}{0}$ , on note  $g(\pi)$  le nombre de triangles capturés entre la diagonale et le chemin  $\pi$  par la gauche et  $d(\pi)$  le nombre de triangles capturés entre la diagonale et le chemin  $\pi$  par la droite.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la deuxième interprétation combinatoire, qui ne nécessite pas d'avoir attribué auparavant des poids sur les arêtes du graphe de Farey en  $(q, t)$ .

**Théorème 6.1.12.** Soit  $\frac{r}{s}$  un rationnel supérieur à 1 et soit  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = [\frac{r}{s}]_{q,t}$  sa  $(q, t)$ -déformation. On a

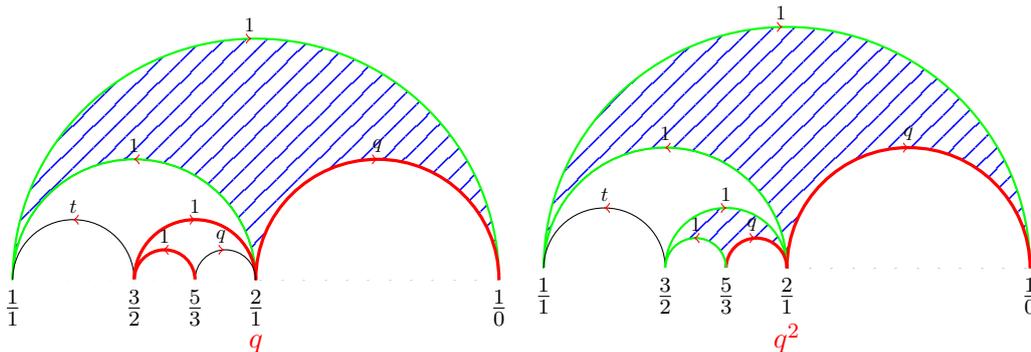
$$\mathcal{R} = \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{0}} q^{d(\pi)} t^{g(\pi)},$$

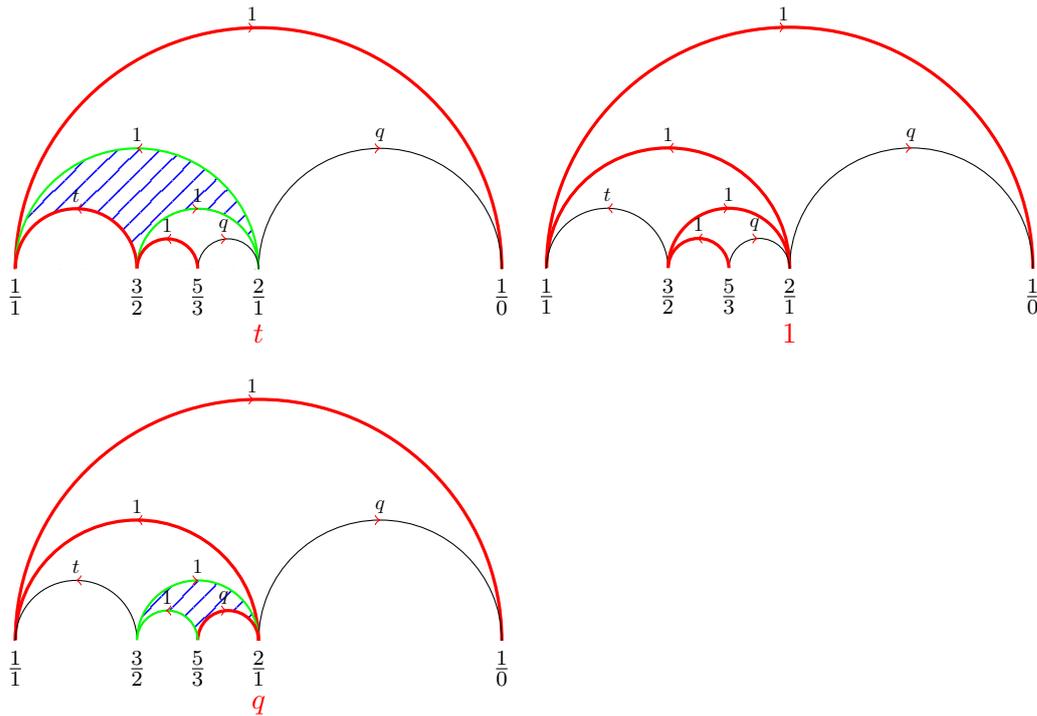
$$\mathcal{S} = \sum_{\pi: \frac{r}{s} \rightarrow \frac{1}{1}} q^{pd(\pi)} t^{pg(\pi)}.$$

*Démonstration.* La preuve de ce théorème se fait par récurrence exactement de la même manière que le Théorème . La seule différence ici est qu'il faudra distinguer deux cas : le triangle que l'on considère est pondéré en  $t$  ou bien il est pondéré en  $q$ . □

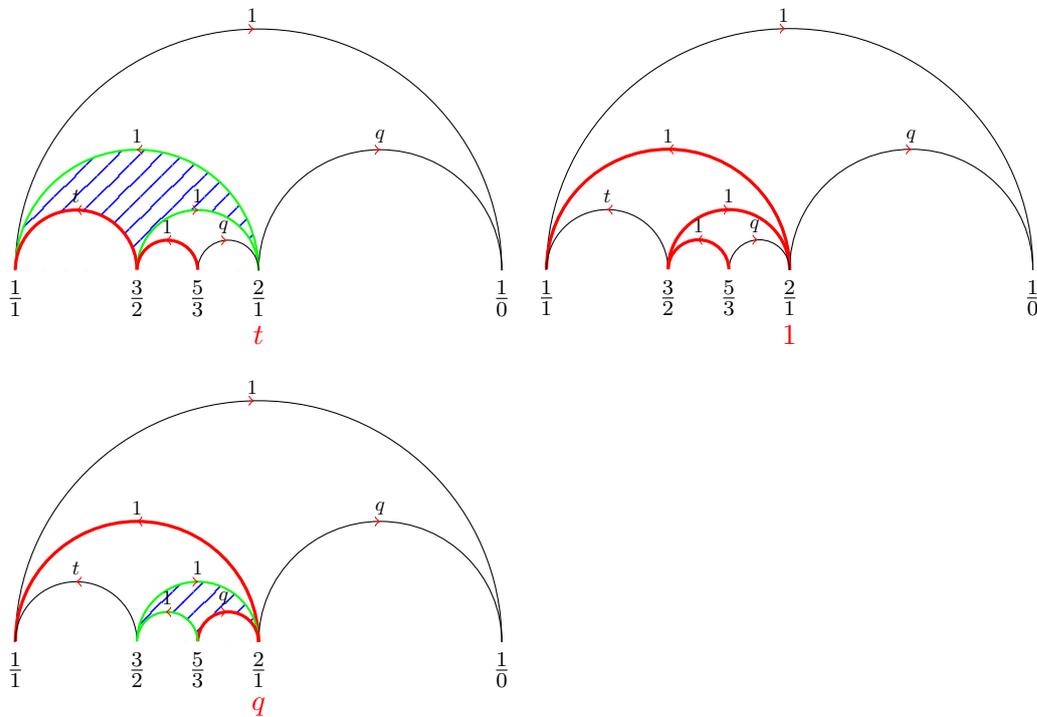
**Exemple 6.1.13.** Illustrons ce théorème dans la triangulation du nombre rationnel  $\frac{3}{5}$ .

Tout d'abord, nous considérons les 5 chemins (représentés en rouge dans chaque figure) partant de  $\frac{3}{5}$  allant à  $\frac{1}{0}$  qui comptent pour le numérateur de  $[\frac{5}{3}]_{q,t}$ . Les triangles capturés entre chaque chemin et la diagonale (représentée en vert) sont hachurés en bleu.





Maintenant, on considère les 3 chemins (représentés en rouge dans chaque figure) partant de  $\frac{3}{5}$  allant à  $\frac{1}{1}$  qui comptent pour le dénominateur de  $\left[ \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]_{q,t}$ . Les triangles capturés entre chaque chemin et la petite diagonale (représentée en vert) sont hachurés en bleu.



On retrouve bien que  $\left[ \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]_{q,t} = \frac{q^2 + 2q + t + 1}{q + t + 1}$ .

## 6.2 Interprétation combinatoire dans les graphes en serpent

Dans cette section nous introduisons un modèle combinatoire que nous n'avions pas encore évoqué dans cette thèse : les graphes en serpent. Pour l'interprétation combinatoire que nous voulons en faire, nous avons besoin de colorer ces graphes en serpent, nous décrivons la méthode utilisée dans la définition qui suit.

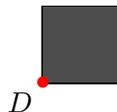
**Définition 6.2.1.** Pour un rationnel  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_n]$  on construit le *graphe en serpent coloré* correspondant de la façon suivante :

- On place horizontalement vers la droite  $a_1$  boîtes colorées en noir.
- On complète verticalement vers le haut au dessus de la dernière boîte noire avec  $a_2$  boîtes colorées en blanc.
- On complète horizontalement à droite de la dernière boîte blanche avec  $a_3$  boîtes colorées en noir.
- ...
- On termine avec  $a_n - 1$  boîtes soit verticales et blanches, soit horizontales et noires.
- On nomme le sommet en bas à gauche de la première boîte noire "D" et le sommet en haut à droite de la dernière boîte "A".

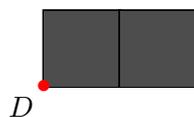
**Remarque 6.2.2.** Si  $n = 1$  on a  $a_1 - 1$  boîtes noires.

**Exemple 6.2.3.** On construit le graphe en serpent coloré correspondant au rationnel  $\frac{43}{19} = [2, 3, 1, 4]$ .

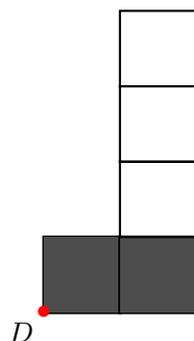
- On commence par placer la première boîte noire et on note son sommet en bas à gauche "D".



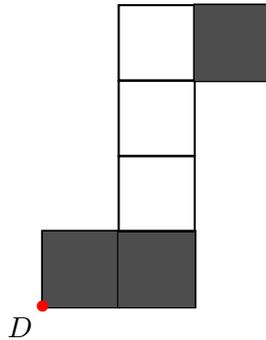
- On place horizontalement à droite de la boîte noire  $2 - 1 = 1$  boîte colorée en noir.



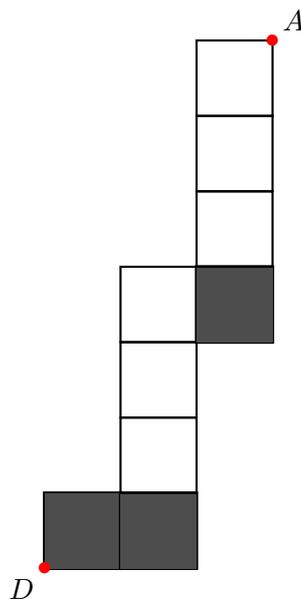
- On place verticalement au dessus de la dernière boîte noire 3 boîtes colorées en blanc.



- On place horizontalement à droite de la dernière boîte blanche 1 boîte colorée en noir.



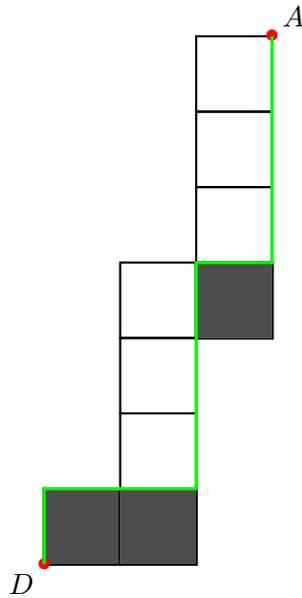
- On place verticalement vers le haut au dessus de la dernière boîte noire  $4 - 1 = 3$  boîtes colorées en blanc.



**Définition 6.2.4.** On définit la *diagonale* dans un graphe en serpent coloré de la façon suivante :

- Elle débute en  $D$  et se termine en  $A$ .
- Quand on va de  $D$  vers  $A$ , les boîtes noires sont à droite et les blanches sont à gauche (c'est le chemin de  $D$  vers  $A$  qui utilise les arêtes du graphe en serpent qui mettent à droite les boîtes noires et à gauche les boîtes blanches).

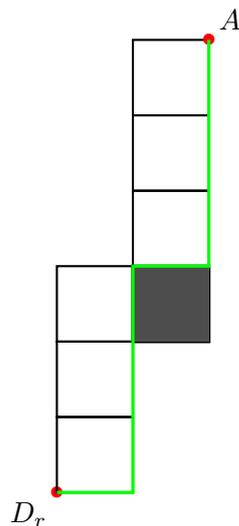
**Exemple 6.2.5.** On reprend l'exemple précédent et on construit la diagonale en vert.



Avant d'énoncer le théorème principal de cette partie formulant notre interprétation combinatoire, nous avons besoin d'introduire quelques notations et nouveau vocabulaire.

**Définition 6.2.6.** Si l'on considère un graphe en serpent coloré associé à un nombre rationnel, on définit le *graphe en serpent coloré réduit* comme le graphe en serpent coloré initial auquel on supprime la ligne de boîtes noires correspondante au coefficient  $a_1$ . On parlera alors de *chemin réduit* lorsqu'on travaillera avec un chemin se situant dans un graphe en serpent coloré réduit. On nommera alors  $D_r$  le point de départ de ce graphe en serpent.

**Exemple 6.2.7.** On représente dans cet exemple le graphe en serpent coloré réduit de l'Exemple .



Dans les graphes en serpent nous allons aussi avoir besoin de la notion d'aire, comme dans les précédents modèles combinatoires.

**Définition 6.2.8.** On définit par  $ar_{\square}(\pi)$  le nombre de boîtes blanches capturées entre la diagonale et le chemin  $\pi$ . De même, on définit par  $ar_{\blacksquare}(\pi)$  le nombre de boîtes blanches capturées entre la diagonale et le chemin  $\pi$ .

Nous pouvons maintenant énoncer notre interprétation combinatoire des  $(q, t)$ -rationnels dans les graphes en serpent.

**Théorème 6.2.9.** Soit  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2n}]$  un rationnel supérieur à 1 et soit  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = [\frac{r}{s}]_{q,t}$  sa  $(q, t)$ -déformation. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sum_{\pi: D \rightarrow A} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)}, \\ \mathcal{S} &= \sum_{\pi: D_r \rightarrow A} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous allons procéder par une double récurrence. L'hypothèse de récurrence  $(HR_n)$  est la suivante :

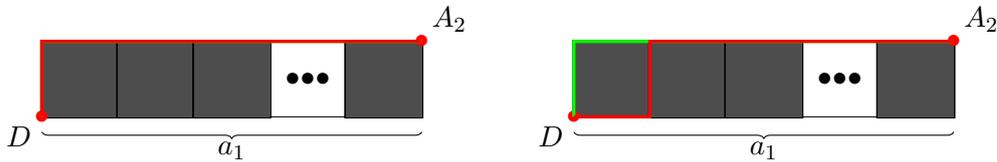
$$\mathcal{R}_{2n} = \sum_{\pi: D \rightarrow A_{2n}} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{2n-1} = \sum_{\pi: D \rightarrow A_{2n-1}} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)} \quad (6.1)$$

où on note  $A_{2n}$  le point d'arrivée du graphe en serpent construit à partir de la fraction continue  $[a_1, \dots, a_{2n}]$  et  $A_{2n-1}$  le point d'arrivée du graphe en serpent construit à partir de la fraction continue  $[a_1, \dots, a_{2n-1}]$ .

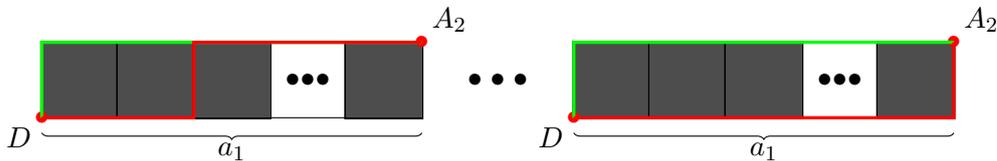
- 1ère étape : On considère le cas particulier où  $a_{2n+2} = 1$ .

- Initialisation :  $\frac{r}{s} = [a_1, 1]$  donc  $[\frac{r}{s}]_{q,t} = [a_1 + 1]_{q,t} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{a_1}$ .

Comme dans l'exemple on construit en vert la diagonale et on construira en rouge les chemins effectués.



Dans le premier graphe le chemin est confondu avec la diagonale ainsi il y a aucune boîte capturée entre la diagonale et le chemin, donc ce chemin donne le coefficient 1 de  $\mathcal{R}_2$ . Dans le deuxième graphe, il y a une boîte noire capturée entre le chemin et la diagonale, donc ce chemin donne le coefficient  $q$  de  $\mathcal{R}_2$ .



Dans le premier graphe, il y a 2 boîtes noires capturées entre la diagonale et le chemin, donc ce chemin donne le coefficient  $q^2$  de  $\mathcal{R}_2$ . Dans le deuxième graphe, il y a  $a_1$  boîtes noires capturées entre le chemin et la diagonale, donc ce chemin donne le coefficient  $q^{a_1}$  de  $\mathcal{R}_2$ .

Dans ce cas on a bien :

$$\left[ \frac{r}{s} \right]_{q,t} = [a_1 + 1]_{q,t} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{a_1} = \mathcal{R}_2 = \sum_{\pi: D \rightarrow A_2} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)}$$

- On suppose que l’hypothèse de récurrence (6.1) ( $HR_n$ ) est vérifiée pour les rationnels de la forme  $[a_1, \dots, a_{2n-1}, 1]$ . Montrons alors ( $HR_{n+1}$ ) pour les rationnels de la forme  $[a_1, \dots, a_{2n+1}, 1]$ . On a les relations matricielles suivantes :

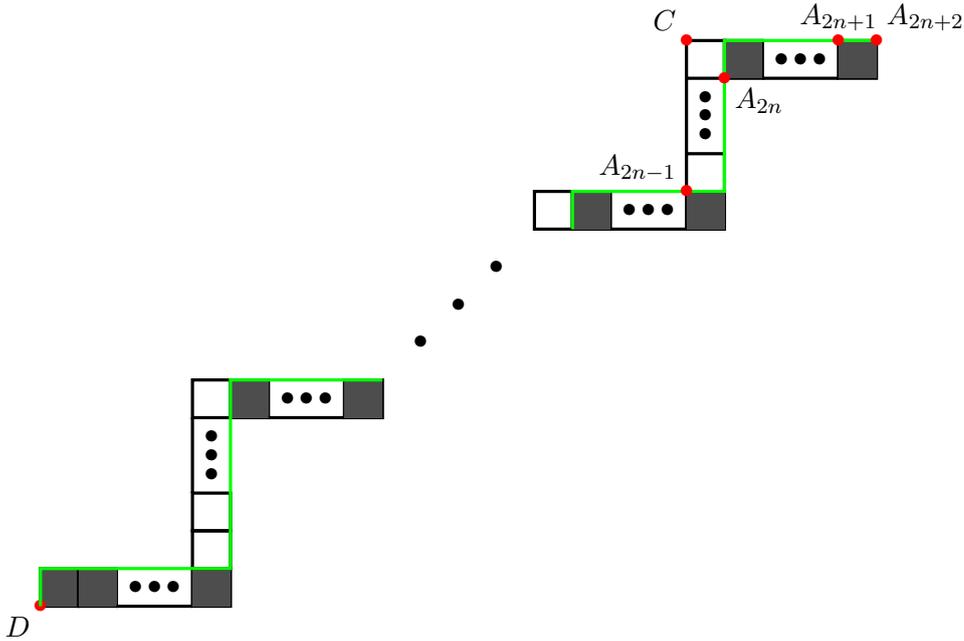
$$\begin{aligned} M_{q,t}(a_1, \dots, a_{2n+1}, 1) &= \begin{pmatrix} [a_1]_q & q^{a_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_2]_t & t^{a_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} [a_{2n}]_t & t^{a_{2n}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_{2n+1}]_q & q^{a_{2n+1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1]_t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2n} & t^{a_{2n}} \mathcal{R}_{2n-1} \\ \mathcal{S}_{2n} & t^{a_{2n}} \mathcal{S}_{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_{2n+1}]_q & t[a_{2n+1}]_q \\ 1 & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2n}[a_{2n+1} + 1]_q + t^{a_{2n}} \mathcal{R}_{2n-1} & t\mathcal{R}_{2n}[a_{2n+1}]_q + t^{a_{2n+1}} \mathcal{R}_{2n-1} \\ \mathcal{S}_{2n}[a_{2n+1} + 1]_q + t^{a_{2n}} \mathcal{S}_{2n-1} & t\mathcal{S}_{2n}[a_{2n+1}]_q + t^{a_{2n+1}} \mathcal{S}_{2n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D’autre part, on sait que :  $M_{q,t}(a_1, \dots, a_{2n+1}, 1) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2n+2} & t\mathcal{R}_{2n+1} \\ \mathcal{S}_{2n+2} & t\mathcal{S}_{2n+1} \end{pmatrix}$ .

Ainsi on obtient les relations suivantes :

$$\mathcal{R}_{2n+2} = \mathcal{R}_{2n}[a_{2n+1} + 1]_q + t^{a_{2n}} \mathcal{R}_{2n-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{2n+1} = \mathcal{R}_{2n}[a_{2n+1}]_q + t^{a_{2n}} \mathcal{R}_{2n-1}.$$

Construisons le graphe en serpent correspondant à la fraction continue  $[a_1, \dots, a_{2n+1}, 1]$ .



Si on s’intéresse à un chemin qui va de  $D$  à  $A_{2n+2}$  :

- \* Soit ce chemin passe par le point  $C$  et dans ce cas il est forcément passé par  $A_{2n-1}$ . Dans ce cas on peut appliquer l’hypothèse de récurrence à ce chemin, et ensuite il capture  $a_{2n}$  boîtes blanches en plus. Ainsi en dénombrant on obtient le terme  $t^{a_{2n}} \mathcal{R}_{2n-1}$ .
- \* Soit ce chemin ne passe pas par  $C$  et dans ce cas il est forcément passé par  $A_{2n}$ . Dans ce cas on peut appliquer l’hypothèse de récurrence à ce chemin, et ensuite il capture soit  $1, 2, \dots, a_{2n+1}$  boîtes noires en plus. Ainsi en dénombrant on obtient le terme  $\mathcal{R}_{2n}[a_{2n+1} + 1]_q$ .

Finalement, on a

$$\mathcal{R}_{2n+2} = \sum_{\pi: D \rightarrow A_{2n+2}} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)}.$$

Un chemin qui va de  $D$  à  $A_{2n+1}$  :

- \* Soit ce chemin passe par le point C et dans ce cas il est forcément passé par  $A_{2n-1}$ . Dans ce cas on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ce chemin, et ensuite il capture  $a_{2n}$  boîtes blanches en plus. Ainsi en dénombrant on obtient le terme  $t^{a_{2n}} \mathcal{R}_{2n-1}$ .
- \* Soit ce chemin ne passe pas par C et dans ce cas il est forcément passé par  $A_{2n}$ . Dans ce cas on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ce chemin, et ensuite il capture soit 1, 2, ...,  $a_{2n+1} - 1$  boîtes noires en plus. Ainsi en dénombrant on obtient le terme  $\mathcal{R}_{2n}[a_{2n+1}]_q$ .

Finalement, on a

$$\mathcal{R}_{2n+1} = \sum_{\pi: D \rightarrow A_{2n+1}} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)}.$$

- 2ème étape : On montre par récurrence sur  $a$  le cas général où  $\frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{2n-1}, a]$ .
  - Initialisation : Le cas  $a = 1$  correspond à l'étape 1 de cette preuve et initialise cette récurrence.
  - On suppose que l'hypothèse de récurrence (6.1) ( $HR_n$ ) est vérifiée dans le cas où  $a_{2n} = a$  et montrons la récurrence dans le cas où  $a_{2n} = a + 1$ .

On a les relations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} M_{q,t}(a_1, \dots, a_{2n-1}, a) &= \begin{pmatrix} [a_1]_q & q^{a_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_2]_t & t^{a_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} [a_{2n-1}]_q & q^{a_{2n-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a]_t & t^a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2n} & t^a \mathcal{R}_{2n-1} \\ \mathcal{S}_{2n} & t^a \mathcal{S}_{2n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_{q,t}(a_1, \dots, a_{2n-1}, a+1) &= \begin{pmatrix} [a_1]_q & q^{a_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_2]_t & t^{a_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} [a_{2n-1}]_q & q^{a_{2n-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a+1]_t & t^{a+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}'_{2n} & t^{a+1} \mathcal{R}'_{2n-1} \\ \mathcal{S}'_{2n} & t^{a+1} \mathcal{S}'_{2n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{D'autre part : } \begin{pmatrix} [a+1]_t & t^{a+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a]_t & t^a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

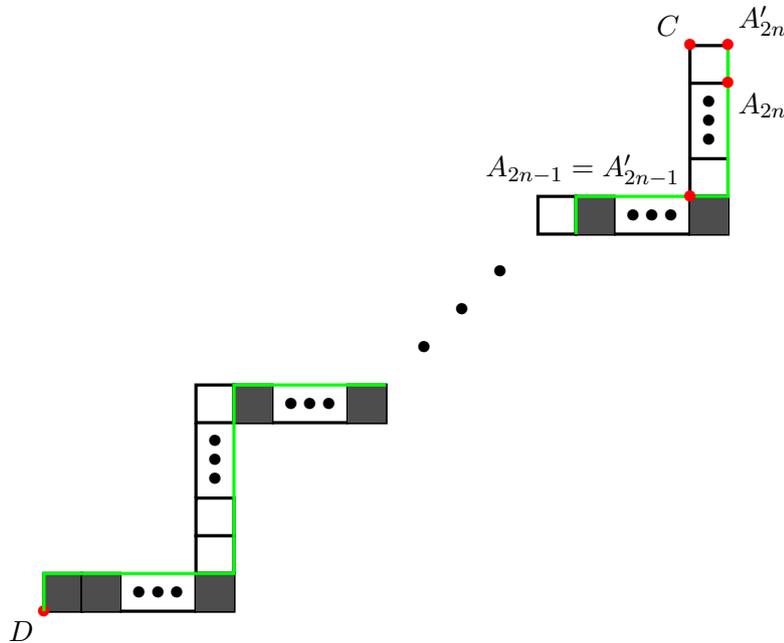
Ainsi on a :

$$\begin{aligned} M_{q,t}(a_1, \dots, a_{2n-1}, a+1) &= \begin{pmatrix} [a_1]_q & q^{a_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_2]_t & t^{a_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} [a_{2n-1}]_q & q^{a_{2n-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a]_t & t^a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2n} & t^a \mathcal{R}_{2n-1} \\ \mathcal{S}_{2n} & t^a \mathcal{S}_{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2n} + t^a \mathcal{R}_{2n-1} & t^{a+1} \mathcal{R}_{2n-1} \\ \mathcal{S}_{2n} + t^a \mathcal{S}_{2n-1} & t^{a+1} \mathcal{S}_{2n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient donc les relations suivantes :

$$\mathcal{R}'_{2n} = \mathcal{R}_{2n} + t^a \mathcal{R}_{2n-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}'_{2n-1} = \mathcal{R}_{2n-1}.$$

Construisons le graphe en serpent correspondant à la fraction continue  $[a_1, \dots, a_{2n-1}, a+1]$ .



Si on s'intéresse à un chemin qui va de  $D$  à  $A'_{2n}$  :

- \* Soit ce chemin passe par  $C$  et dans ce cas il n'a pas pu passer par  $A_{2n}$  mais il est forcément passé par  $A_{2n-1}$  donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ce chemin. Puis il capture  $a$  boîtes blanches en plus. Ainsi en dénombrant on obtient le terme  $t^a \mathcal{R}_{2n-1}$ .
- \* Soit ce chemin ne passe pas par  $C$  et dans ce cas il est forcément passé par  $A_{2n}$  donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ce chemin. Puis il termine en coïncidant avec la diagonale donc il ne capture aucune boîte supplémentaire. Ainsi en dénombrant on obtient le terme  $\mathcal{R}_{2n}$ .

On obtient alors

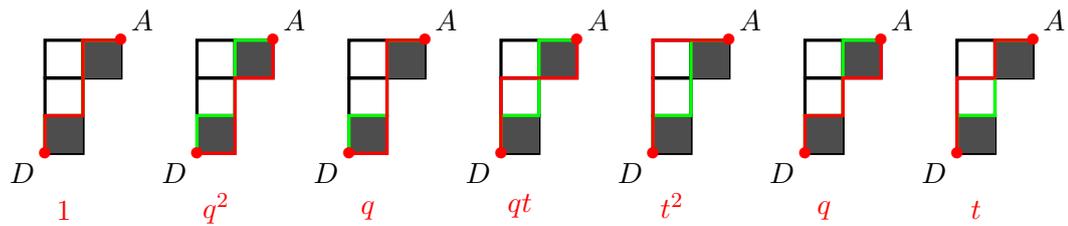
$$\mathcal{R}'_{2n} = \sum_{\pi: D \rightarrow A'_{2n}} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)} \quad \text{et trivialement} \quad \mathcal{R}'_{2n-1} = \sum_{\pi: D \rightarrow A'_{2n-1}} q^{ar_{\blacksquare}(\pi)} t^{ar_{\square}(\pi)}.$$

Les preuves pour le dénominateur  $\mathcal{S}$  sont similaires. □

**Exemple 6.2.10.** Observons le graphe en serpent associé au rationnel  $\frac{7}{5}$ .

Nous calculons à l'aide d'un programme informatique  $\left[ \frac{7}{5} \right]_{q,t} = [1, 2, 2]_{q,t} = \frac{1+2q+t+q^2+t^2+qt}{qt+t^2+q+t+1}$ .

Dans le graphe en serpent coloré correspondant, nous avons 7 chemins allant de  $D$  à  $A$ , on les représente en rouge dans les figures ci-dessous.



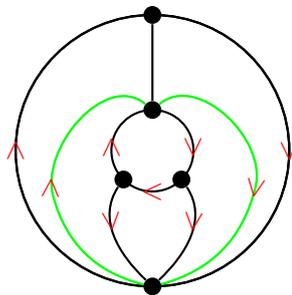
Grâce à ces sept chemins, on retrouve bien le numérateur  $\mathcal{R} = 1 + 2q + t + q^2 + t^2 + qt$ .

### 6.3 Interprétation des $(q, t)$ -traces dans la triangulation des anneaux

Nous nous intéressons de nouveau au modèle de triangulation des anneaux (voir le § pour l'introduction de ce modèle). Dans le cas des  $q$ -rationnels nous avons donné une interprétation combinatoire des  $q$ -traces (voir le §) en utilisant ces triangulations d'anneaux. Il s'agit ici de donner une  $(q, t)$ -version de ce résultat en voyant quelles précisions supplémentaires l'introduction du paramètre  $t$  nous apporte.

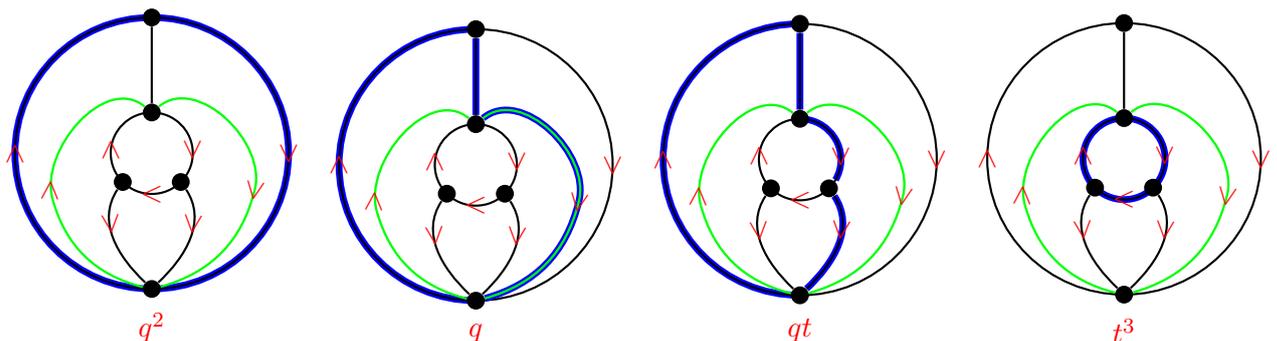
De nouveau ici, nous allons devoir désigner la *diagonale* dans la triangulation d'un anneau. Il s'agit toujours du chemin allant du rationnel considéré à  $\frac{1}{0}$ . Regardons un exemple.

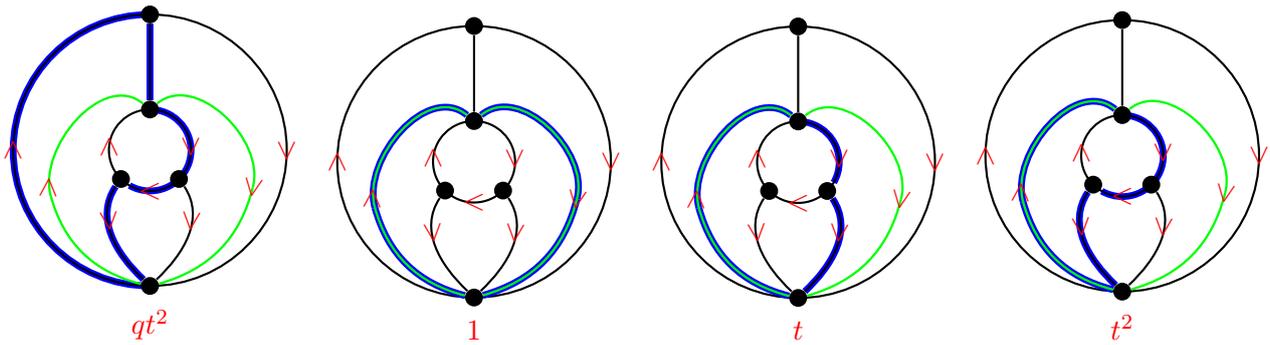
**Exemple 6.3.1.** Construisons (en suivant la méthode décrite au §) la triangulation d'anneau correspondante au rationnel  $\frac{7}{3}$ . Nous représentons en vert la boucle correspondant à la diagonale.



**Théorème 6.3.2.** On obtient les  $(q, t)$ -traces en comptant le nombre de triangles capturés entre la diagonale et les boucles fermées. Si un triangle est capturé est à l'intérieur de la diagonale il compte pour  $t$ . Sinon il compte pour  $q$ .

**Exemple 6.3.3.** Construisons l'anneau correspondant au rationnel  $\frac{7}{3}$ . En bleu on trace les 8 boucles fermées dans cet anneau et en vert la diagonale.





En calculant à l'aide d'un programme informatique on trouve que

$$M_{q,t} \left( \frac{7}{3} \right) = \begin{pmatrix} qt^2 + q^2 + qt + t^2 + q + t + 1 & qt^3 + t^3 \\ t^2 + t + 1 & t^3 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc bien  $\text{Tr} \left( M_{q,t} \left( \frac{7}{3} \right) \right) = qt^2 + t^3 + q^2 + qt + t^2 + q + t + 1$  en utilisant le comptage du Théorème .



## Annexe A

# Évaluations en les racines de l'unité

La formule permet d'exprimer  $M_q(c_1, \dots, c_k)$  en fonctions des générateurs  $R_q$  et  $S_q$ .

Pour rappel,  $M_q(c_1, \dots, c_k) = R_q^{c_1} S_q R_q^{c_2} S_q \cdots R_q^{c_k} S_q$  avec  $R_q := \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $S_q := \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Par définition de la  $q$ -déformation, lorsqu'on fait tendre  $q$  vers 1, on retrouve le nombre de départ. Il paraît alors assez naturel de se demander ce qu'il se passe lorsqu'on fait tendre  $q$  vers  $-1$ ? Ou vers une racine de l'unité?

Nous allons donc évaluer dans ce chapitre les matrices précédentes en les racines de l'unité  $q = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Les matrices  $R_q$  et  $S_q$  ainsi évaluées seront alors d'ordre fini, et nous calculerons tous les produits possibles de  $S_q$  et  $R_q$  nous permettant d'obtenir les matrices  $M_q(c_1, \dots, c_k)$ . Nous considérerons les matrices obtenues à  $\pm q^k I_2$  près étant donné que nous travaillons dans  $\text{PGL}(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}])$ .

Nous avons créé pour ces calculs, un programme sur Sagemath, permettant de calculer tous les produits pour générer le sous-groupe et qui élimine automatiquement les matrices équivalentes (dans  $\text{PGL}(2, \mathbb{Z}[q^{\pm 1}])$ ) aux matrices calculées au fur et à mesure.

### A.1 Pour $n = 2$ ( $q = -1$ )

La valeur  $q = -1$  est particulière. Dans ce cas, nous avons ce qui suit.

**Proposition A.1.1.** (i) Pour tout rationnel  $\frac{r}{s}$ , les polynômes correspondants  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  évalués en  $q = -1$  ne peuvent prendre que trois valeurs :  $-1, 0$ , ou  $1$ .

(ii)  $\mathcal{R}(-1) = 0$  si et seulement si  $r$  est pair.

(iii)  $\mathcal{S}(-1) = 0$  si et seulement si  $s$  est pair.

**Remarque A.1.2.** Un corollaire de la Proposition (ii) est que, pour un  $r$  pair, le polynôme  $\mathcal{R}(q)$  est un multiple de  $(1 + q)$ , et de même pour  $\mathcal{S}(q)$ .

Nous prouvons maintenant la Proposition . Dans le cas où  $q = -1$ , les matrices  $R_q$  et  $S_q$  sont les suivantes :

$$R_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{-1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposition A.1.3.** Le sous-groupe engendré par les matrices  $R_{-1}$  et  $S_{-1}$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_3$ .

*Démonstration.*  $R_{-1}$  et  $S_{-1}$  engendrent le sous-groupe comportant les 6 matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe engendré par ces deux matrices est d'ordre 6. Il est donc soit isomorphe à  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  ou à  $\mathfrak{S}_3$ . Or il n'a pas d'élément d'ordre 6, il est donc isomorphe à  $\mathfrak{S}_3$ . □

Chacune de ces matrices a des coefficients  $-1, 0$ , ou  $1$ . Les matrices  $M_{-1}(c_1, \dots, c_k)$  sont parmi celles-ci. D'après la Proposition, le numérateur  $\mathcal{R}(-1)$  d'un  $q$ -rationnel est égal au coefficient supérieur gauche de  $M_{-1}(c_1, \dots, c_k)$ . D'où Proposition, Partie (i).

Pour prouver la partie (ii), nous procédons par récurrence dans le graphe de Farey. Pour tout  $q$ -rationnel  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = [\frac{r}{s}]_q$  est obtenu comme la somme de Farey pondérée :

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'} \oplus_q \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{S}''}.$$

En particulier,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}' + q^l \mathcal{R}''$ . Soit  $r', r''$  les numérateurs des rationnels correspondants. Par hypothèse de récurrence, on a :

(a)  $\mathcal{R}'(-1) = \pm 1$  et  $\mathcal{R}''(-1) = \pm 1$  si et seulement si  $r'$  et  $r''$  sont impairs.

(b)  $\mathcal{R}'(-1) = 0$  et  $\mathcal{R}''(-1) = 0$  si et seulement si  $r'$  et  $r''$  sont pairs.

L'entier  $r$  est pair si et seulement si  $r', r''$  sont soit impairs, soit pairs. Au vu de la partie (i), cela implique que  $\mathcal{R}(-1) = 0$  si et seulement si  $r$  est pair. Et de même pour  $\mathcal{S}$ .

La proposition est prouvée.

## A.2 Pour $n = 3$ ( $q = e^{2i\pi/3}$ )

Dans le cas où  $q = e^{2i\pi/3}$ , les matrices  $R_q$  et  $S_q$  sont les suivantes :

$$R_{e^{2i\pi/3}} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{e^{2i\pi/3}} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposition A.2.1.** *Le sous-groupe engendré par les matrices  $R_{e^{2i\pi/3}}$  et  $S_{e^{2i\pi/3}}$  est isomorphe à  $\mathfrak{A}_4$ .*

*Démonstration.*  $R_{e^{2i\pi/3}}$  et  $S_{e^{2i\pi/3}}$  engendrent le sous-groupe comportant les 12 matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}.$$

On a dans ce groupe 3 éléments d'ordre 2, 8 éléments d'ordre 3 et l'identité. Ainsi ce groupe est isomorphe à  $\mathfrak{A}_4$ .  $\square$

### A.3 Pour $n = 4$ ( $q = i$ )

Dans le cas où  $q = i$ , les matrices  $R_q$  et  $S_q$  sont les suivantes :

$$R_i = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_i := \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposition A.3.1.** *Le sous-groupe engendré par les matrices  $R_i$  et  $S_i$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_4$ .*

*Démonstration.*  $R_i$  et  $S_i$  engendrent le sous-groupe comportant les 24 matrices suivantes :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & -i-1 \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -i+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & i-1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i+1 & -1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i+1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i-1 \\ -i+1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i+1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il y a ainsi 6 éléments d'ordre 4, 8 éléments d'ordre 8, 9 éléments d'ordre 2 et l'identité. Ainsi ce groupe est isomorphe à  $\mathfrak{S}_4$ .  $\square$

### A.4 Pour $n = 5$ ( $q = e^{2i\pi/5}$ )

Dans le cas où  $q = e^{2i\pi/5}$ , les matrices  $R_q$  et  $S_q$  sont les suivantes :

$$R_{e^{2i\pi/5}} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi/5} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{e^{2i\pi/5}} := \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2i\pi/5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposition A.4.1.** *Le sous-groupe engendré par les matrices  $R_{e^{2i\pi/5}}$  et  $S_{e^{2i\pi/5}}$  est isomorphe à  $\mathfrak{A}_5$ .*

*Démonstration.* La preuve se base de nouveau sur le logiciel de calcul explicitant les 64 matrices composant ce groupe et en étudiant leurs ordres. Cependant ici, nous ne pourrions les expliciter car les coefficients deviennent trop grands et les matrices trop imposantes.  $\square$

**A.5 Pour  $n \geq 6$** 

**Proposition A.5.1.** *À partir de  $n = 6$ , le sous-groupe engendré par les matrices  $R_{e^{2i\pi/n}}$  et  $S_{e^{2i\pi/n}}$  est infini.*

Pour une preuve de ce résultat, se référer à [37] (Remark 2.4) en adaptant l'argument à nos matrices. Il s'agit de montrer que la matrice  $R_{e^{2i\pi/n}}S_{e^{2i\pi/n}}$  ne peut pas être d'ordre finie en étudiant les valeurs propres et le polynôme caractéristique.

# Bibliographie

- [1] Martin Aigner. *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture : A Mathematical Journey from Irrational Numbers to Perfect Matchings*. Springer Cham, 01 2013.
- [2] Asilata Bapat, Louis Becker, and Anthony M. Licata.  $q$ -deformed rational numbers and the 2-Calabi–Yau category of type  $a_2$ . *Forum Math. Sigma* 11, 2023.
- [3] Karin Baur, Ilke Canakci, Karin M. Jacobsen, Maitreyee C. Kulkarni, and Gordana Todorov. Infinite friezes and triangulations of annuli.
- [4] Karin Baur, Klemens Fellner, Mark J. Parsons, and Manuela Tschabold. Growth behaviour of periodic tame friezes. *Rev. Mat. Iberoam.*, 35(2) :575–606, 2019.
- [5] Schiffler Ralf Bazier-Matte, Véronique. Knot theory and cluster algebras. *Adv. Math.* 408, 2022.
- [6] G. Berhuy. *Algèbre : le grand combat*. Mathématiques en devenir. Calvage & Mounet, 2018.
- [7] J. Borwein, A. van der Poorten, J. Shallit, and W. Zudilin. *Neverending Fractions : An Introduction to Continued Fractions*. Australian Mathematical Society Lecture Series. Cambridge University Press, 2014.
- [8] D. Broline, D. W. Crowe, and I. M. Isaacs. The geometry of frieze patterns. *Geometriae Dedicata*, 3 :171–176, 1974.
- [9] Ilke Canakci and Ralf Schiffler. Snake graphs and continued fractions. *European J. Combin.*, 86 :103081, 19, 2020.
- [10] Charles H. Conley and Valentin Ovsienko. Rotundus : triangulations, Chebyshev polynomials, and Pfaffians. *Math. Intelligencer*, 40(3) :45–50, 2018.
- [11] Charles H. Conley and Valentin Ovsienko. Rotundus : Triangulations, chebyshev polynomials, and pfaffians. *The Mathematical Intelligencer*, 40(3) :45–50, August 2018.
- [12] J. H. Conway and H. S. M. Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns. *Math. Gaz.*, 57(400) :87–94, 175–183, 1973.
- [13] J.B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Functions of One Complex Variable. Springer, 1978.
- [14] H. S. M. Coxeter. Frieze patterns. *Acta Arith.*, 18 :297–310, 1971.
- [15] Sergi Elizalde, Matthew Plante, Tom Roby, and Bruce Sagan. Rowmotion on fences. *Sém. Lothar. Comb.*, 86, 2021.
- [16] Sergi Elizalde and Bruce Sagan. Partial rank symmetry of distributive lattices for fences. *Annals of Combinatorics*, 27, 2022.

- [17] Leonhard Euler. *Introductio in analysin infinitorum*, vol. i, 1748., 1748.
- [18] H. Exton. *q-hypergeometric Functions and Applications*. Ellis Horwood series in mathematics and its applications. E. Horwood, 1983.
- [19] Li Fan and Yu Qiu. Topological model for  $q$ -deformed rational number and categorification. arxiv :2306.00063., 2023.
- [20] Anna Felikson, , Oleg Karpenkov, Khrystyna Serhiyenko, and Tumarkin Pavel.  $3d$  Farey graph, lambda lengths and  ${}_2$ -tilings. arxiv :2306.17118., 2023.
- [21] Sergey Fomin, Michael Shapiro, and Dylan Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes. *Acta Math.*, 201(1) :83–146, 2008.
- [22] J. S. Frame. Continued Fractions and Matrices. *Amer. Math. Monthly*, 56(2) :98–103, 1949.
- [23] Evelia R. Garcia Barroso, Pedro D. Gonzalez Perez, and Patrick Popescu-Pampu. The combinatorics of plane curve singularities : how Newton polygons blossom into lotuses. In *Handbook of geometry and topology of singularities. I*, pages 1–150. Springer, Cham, 2020.
- [24] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, second edition, 1994. A foundation for computer science.
- [25] Emily Gunawan, Gregg Musiker, and Hannah Vogel. Cluster algebraic interpretation of infinite friezes. *European J. Combin.*, 81 :22–57, 2019.
- [26] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles.
- [27] G.H. Hardy, E.M. Wright, D.R. Heath-Brown, and J. Silverman. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford mathematics. OUP Oxford, 2008.
- [28] F. Hirzebruch and D. Zagier. Classification of Hilbert modular surfaces. In W. L. Baily, Jr. and T. Shioda, editors, *Complex analysis and algebraic geometry : A collection of papers dedicated to K. Kodaira*, pages 43–77. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977. MR :480356. Zbl :0354.14011.
- [29] Friedrich E. P. Hirzebruch. Hilbert modular surfaces. *Enseign. Math. (2)*, 19 :183–281, 1973.
- [30] A. Hurwitz. Ueber die angenäherte darstellung der irrationalzahlen durch rationale brüche. *Mathematische Annalen*, 39 :279–284, 1891.
- [31] OEIS Foundation Inc. The on-line encyclopedia of integer sequences, <http://oeis.org>.
- [32] Perrine Jouteur. Bureau representation of  $b_4$  and quantization of the rational projective plane. arxiv :2407.20645., 2024.
- [33] Takeyoshi Kogiso.  $q$ -deformations and  $t$ -deformations of markov triples. *arXiv : Number Theory*, 2020.
- [34] Takeyoshi Kogiso and Michihisa Wakui. A bridge between Conway-Coxeter friezes and rational tangles through the Kauffman bracket polynomials. *J. Knot Theory Ramifications*, 28(14) :1950083, 40, 2019.

- 
- [35] Takeyoshi Kogiso and Michihisa Wakui. A characterization of Conway-Coxeter friezes of zigzag type by rational links. *Osaka J. Math.* 59, 2022.
- [36] Sébastien Labbé and Mélodie Lapointe. The  $q$ -analog of the Markoff injectivity conjecture over the language of a balanced sequence. *Comb. Theory*, 2(1) :Paper No. 9, 25, 2022.
- [37] Sébastien Labbé, Mélodie Lapointe, and Wolfgang Steiner. A  $q$ -analog of the markoff injectivity conjecture holds. *Algebraic Combinatorics*, 6(6) :1677–1685, january 2024.
- [38] Ludivine Leclere and Sophie Morier-Genoud.  $q$ -deformations in the modular group and of the real quadratic irrational numbers. *Advances in Applied Mathematics*, 130 :102223, 2021.
- [39] Ludivine Leclere and Sophie Morier-Genoud. Quantum continuants, quantum rotundus and triangulations of annuli. *Electron. J. Comb.*, 30(P3.35), 2023.
- [40] Ludivine Leclere, Sophie Morier-Genoud, Valentin Ovsienko, and Alexander Veselov. On radius of convergence of  $q$ -deformed real numbers. *Moscow Mathematical Journal*, 2023.
- [41] Thomas McConville, Bruce E. Sagan, and Clifford Smyth. On a rank-unimodality conjecture of morier-genoud and ovsienko. *Discrete Mathematics*, 344, 2021.
- [42] Sophie Morier-Genoud. Coxeter’s frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 47(6) :895–938, 2015.
- [43] Sophie Morier-Genoud and Valentin Ovsienko. Farey boat : continued fractions and triangulations, modular group and polygon dissections. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 121(2) :91–136, 2019.
- [44] Sophie Morier-Genoud and Valentin Ovsienko. On  $q$ -deformed real numbers. *Experimental Mathematics*, 31(2) :652–660, October 2019.
- [45] Sophie Morier-Genoud and Valentin Ovsienko.  $q$ -deformed rationals and  $q$ -continued fractions. *Forum Math. Sigma*, 8 :e13, 55, 2020.
- [46] Sophie Morier-Genoud, Valentin Ovsienko, and Alexander Veselov. Burau representation of braid groups and  $q$ -rationals. *IMRN*, 2024.
- [47] Mr. Muir. Letter from Mr. Muir to Professor Sylvester on the Word Continuant. *Amer. J. Math.*, 1(4) :344, 1878.
- [48] Thomas Muir. *A treatise on the theory of determinants*. Dover Publications, Inc., New York, 1960. Revised and enlarged by William H. Metzler.
- [49] Gregg Musiker, Nicholas Ovenhouse, Ralf Schiffler, and Sylvester Zhang. Higher dimer covers on snake graphs. arxiv :2306.14389., 2023.
- [50] Ezgi Kantarci Oguz. Oriented posets, rank matrices and  $q$ -deformed Markov numbers. arXiv :2206.05517.
- [51] Ezgi Kantarci Oguz and Mohan Ravichandran. Rank polynomials of fence posets are unimodal. *Discrete Math.*, 346(2) :Paper No. 113218, 2023.
- [52] Ezgi Kantarci Oguz and Emine Yildirim. Cluster algebras and oriented posets. arXiv :2211.08011.
- [53] Nicholas Ovenhouse.  $q$ -rationals and finite Schubert varieties. *Open Comm. Nonlinear Math. Phys.*1, 2021.

- [54] Valentin Ovsienko. Towards quantized complex numbers :  $q$ -deformed gaussian integers and the Picard group. *Open Comm. Nonlinear Math. Phys.1*, 2021.
- [55] Valentin Ovsienko and Ustinov Alexei. On  $q$ -deformed cubic equations : the quantum heptagon and nonagon. arxiv :2408.13670., 2024.
- [56] Valentin Ovsienko and Emmanuel Pedon. Continued fractions for  $q$ -deformed real numbers,  $\{-1, 0, 1\}$ -Hankel determinants, and Somos-Gale-Robinson sequences. arxiv :2312.17009., 2025.
- [57] Oskar Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Chelsea Publishing Co., New York, N. Y., 1950. 2d ed.
- [58] James Propp. The combinatorics of frieze patterns and Markoff numbers. *Integers*, 20 :Paper No. A12, 38, 2020.
- [59] Xin Ren. On radiuses of convergence of  $q$ -metallic numbers and related  $q$ -rational numbers. *Res. Number Theory*, 8(3) :Paper No. 37, 2022.
- [60] Christophe Reutenauer. *From Christoffel words to Markoff numbers*. Oxford University Press, Oxford, 2019.
- [61] Caroline Series. The Modular Surface and Continued Fractions. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-31(1) :69–80, February 1985.
- [62] Adam Sikora. Tangle equations, jones conjecture, and quantum continued fractions. *Canad. J. Math.*, 2024.
- [63] E.C. Titchmarsh. *The Theory of Functions*. Oxford University Press, 1939.
- [64] A.J. Van Der Poorten. An introduction to continued fractions. In J. H. Loxton and A. J. Van Poorten, editors, *Diophantine Analysis*, pages 99–138. Cambridge University Press, 1 edition, July 1986.
- [65] Michihisa Wakui.  $q$ -deformed integers derived from pairs of coprime integers and applications. arxiv :2209.07724., 2022.

Ce travail est consacré à l'étude des  $q$ -analogues de nombre réels. La  $q$ -déformation d'un nombre rationnel utilisée est une fraction rationnelle à coefficients entiers qui a été introduite par Sophie Morier-Genoud et Valentin Ovsienko en 2019. Il s'agit dans un premier temps de préciser les propriétés algébriques et de donner des interprétations combinatoires des  $q$ -rationnels. On manipule les différentes notions liées aux nombres rationnels : les fractions continues, les matrices de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , les continuants d'Euler, les triangulations de polygones et le graphe de Farey, et leurs versions  $q$ -déformées. Les traces des  $q$ -matrices de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  obtenues sont étudiées et interprétées dans le modèle combinatoire de triangulations d'anneaux. Dans un second temps, nous nous intéressons à la  $q$ -déformation des nombres irrationnels et plus particulièrement des irrationnels quadratiques. Nous obtenons une formule explicite permettant de décrire les  $q$ -irrationnels quadratiques. On s'intéresse aux rayons de convergence des séries de Laurent obtenues à partir des  $q$ -déformations des nombres réels. Enfin, nous introduisons un second paramètre pour obtenir des  $(q, t)$ -déformations de nombres. Ces dernières sont étudiées sous un aspect combinatoire pour affiner les interprétations dans les modèles déjà présentés mais également dans les graphes en serpents.

**Mots-clés :** Fractions continues, Graphe de Farey,  $q$ -analogues, continuants d'Euler, groupe modulaire, triangulation des anneaux, triangulation des polygones.

---

This work is devoted to the study of  $q$ -analogs of real numbers. The  $q$ -deformation of a rational number that we use is a rational function with integer coefficients which was introduced by Sophie Morier-Genoud and Valentin Ovsienko in 2019. The first step is to elaborate algebraic properties and to give combinatorial interpretations of the  $q$ -rationals. We use different notions linked to rational numbers : continued fractions,  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  matrices, Euler continuants, polygon's triangulations and the Farey graph, and their  $q$ -deformed versions. The traces of the  $q$ -matrices of  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  that we obtained are studied and interpreted in the combinatorial model of triangulation of annulus. In a second stage, we focus on the  $q$ -deformations of irrational real numbers, and more precisely on quadratic irrational real numbers. We obtain an explicit formula to describe  $q$ -deformed quadratic irrationals. We give estimate for the radii of convergence of the Laurent series obtained from the  $q$ -deformations of real numbers. Finally, we introduce a second parameter to obtain  $(q, t)$ -deformations of the rationals. The latter is studied in its combinatorial aspect, in the models already described but also in terms of snake graphs.

**Keywords :** Continued fractions, Farey graph,  $q$ -analogs, Euler's continuants, modular group, ring's triangulation, polygon's triangulation.

**Discipline :** Mathématiques fondamentales.

**Spécialité :** Algèbre, Combinatoire, Analyse complexe.

